第 5 章 等角写像と 2 次元流

領域 D で正則な複素関数において，z 平面の微小な直交座標系は，w 平面上の微小な直交座標系に 1 対 1 に写像されており，変数と関数の間に角度が保存されるような対応関係が成立しています．これを等角写像と呼び，電磁気学や流体力学等の分野で 2 次元的な流れの解析に用いられています．

5.1 正則関数と 2 次元流

正則な複素関数 $f(z) = u + iv$ において，コーシー・リーマンの方程式を x，y で偏微分することにより，以下の関係式が得られます．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

ここで，u，v が連続関数のとき，それらの偏微分の順序を入れ替えることが許されるので，次の関係式が成立します．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

この式を **2 次元のラプラス (Laplace) 方程式**と呼び，これを満たす関数を**調和関数**といいます．すなわち，正則な複素関数 $f(z)$ の実部 u と虚部 v はともに調和関数となり，互いに**共役**な関係にあります．

一般に，3 次元のラプラス方程式は，$\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$ となり，

これを満たす調和関数 ϕ は，流体や電磁気をはじめとする様々な物理量を表すことが知られています．ここで，例えば 3 次元の奥行き方向が均一となる場合は，先に示した 2 次元の方程式に縮退させることが可能となり，正則な複素関数により表現することができます．

ここでは，**非圧縮性の完全流体**が，湧き出しなどがなく管状に流れている定常的状態を想定し，これが正則な複素関数で表されることを示します．

はじめに，**2 次元のベクトル場**として，2 次元の平面 (x, y) 上に成分が (u, v) となるベクトル $\boldsymbol{f}$ を定義します．

このとき，$\mathrm{div}\boldsymbol{f} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}$ を**発散**と呼びます．これは**図 5-1** に示すように，微小な矩形の領域から流出する量 $\left\{\dfrac{(v+\Delta v)\Delta x + (u+\Delta u)\Delta y}{\Delta x \Delta y}\right\}$ と，流入する量 $\left\{\dfrac{v\ \Delta x + u\ \Delta y}{\Delta x \Delta y}\right\}$ との差分 $\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta y}\right)$ と考えられ，この極限の値が 0 となるとき，流入量と流出量が一致して流れは**管状**になり，次式が成立します．

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

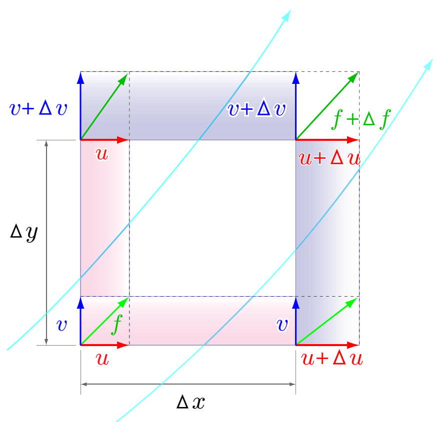

図 5-1　発散 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{f}$ のイメージ

一方，$\mathrm{rot}\boldsymbol{f} = \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{r}$ を**回転**と呼びます．ここで，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ を xy 平面の単位ベクトルとしたとき，$\boldsymbol{f} = u\boldsymbol{p} + v\boldsymbol{q}$ であり，$\boldsymbol{r}$ は，xy 平面に直交する z 方向の単位ベクトルを表しています．なお，**図 5-2** に示すように，ベクトル $\boldsymbol{f}$ の z 軸を中心とする回転成分は，$\left(\frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta u}{\Delta y}\right)$ で表すことができ，この極限をとると回転 $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$ になることが分かります．

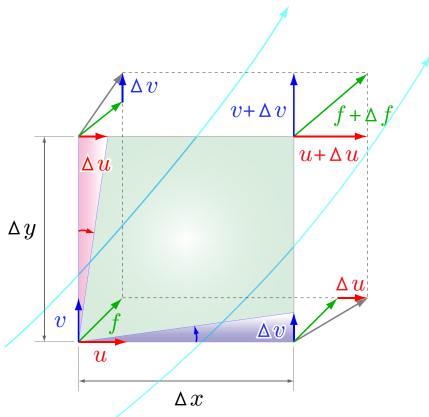

図 5-2　回転 $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$ のイメージ

2 次元の流れに渦がない場合は，回転 $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}$ を $\mathbf{0}$ と置くことにより，

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

が導かれます．すなわち，$\mathrm{div}\boldsymbol{f} = 0$，$\mathrm{rot}\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ のとき，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

となりますが，残念ながらコーシー・リーマンの方程式と $\pm$ の符号が反転しているので，$f(z) = u + iv$ は正則にはなりません．その理由は直交平面における回転方向の定義にずれが生じるためですが，正則な複素関数の特性を活用するため，f の共役複素数 $\overline{f(z)} = u - iv$ を対象として 2 次元流の解析を行い，最後に複素共役をとって $f(z)$ を求める方針で進めることにします．

ここで，共役な調和関数 ϕ，ψ を用いて，ある正則な関数 $w = \phi + i\psi$ を定義します．

このとき，コーシー・リーマンの方程式を導いたときと同様にして，

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}i = \frac{\partial\phi}{i\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

が得られます．この実部を u，虚部を $-v$ とおくと，

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = u \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = v$$

となるので，これらを先に示した式に代入すると，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

が導かれ，ϕ，ψ は 2 次元のラプラス方程式を満たしていることが分かります．このとき，ϕ を**速度ポテンシャル**，ψ を**流れの関数**と呼びます．

さらに，正則な複素関数 $w = \phi + i\psi$ を**複素速度ポテンシャル**といいます．

ここで，ϕ が一定となる (x, y) を**等ポテンシャル線**，ψ が一定となる (x, y) を**流線**といい，これらは等角写像の関係により，互いに直交しています．

なお，2 次元の場合，$\mathrm{grad} = \dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{p} + \dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{q}$ を**勾配**と呼び，

$$\mathrm{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{p} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{q} = u\boldsymbol{p} + v\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}$$

の関係が成立します．すなわち，

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}i = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\phi}{\partial y} = u - iv = \overline{f(z)}$$

となり，

$$f(z) = u + iv = \overline{\left(\frac{dw}{dz}\right)}$$

を**複素速度**と呼びます．また，流れの速度の大きさは，以下のように求められます．

$$|\boldsymbol{f}| = \sqrt{u^2 + v^2} = \left|\frac{dw}{dz}\right|$$

調和関数のイメージ

ある領域 D で正則となる複素関数は，その実部と虚部の間に，強い制約条件が課されており，実部と虚部がそれぞれ共役な調和関数となります．

以下，その調和関数のイメージを探ってみましょう．

領域 D で正則となる複素関数の実部が，例えば地形の高度を表すものとします．すなわち，複素変数 z が水平に置かれた平面上の座標 (x, y)，複素関数の実部がその高さ h となります．高さが一定となるような変数 z を求め，これを z 平面上にプロットすると，ある曲線群を構成します．これが等ポテンシャル線であり，地図の等高線に相当します．

一方，関数の虚部は流れ（勾配が最大となる向き）を表しており，その値が一定となる変数 z を同様にプロットすると，流線と呼ばれる曲線群となります．これら 2 種類の曲線群は，その交点の近傍で互いに直交します．

例えば山の斜面にボールを静かに置くと，等高線と直交する向きに転がり落ちてゆきます．流線は，そのボールの軌跡に相当し，等高線と直交することが感覚的に理解できると思います．

このように，ある領域で正則となる複素関数では，実部（等高線）が定まれば虚部（ボールが転がり落ちる軌跡）は定数項を除いて，自動的に確定するという性質があります．

なお，ある領域 D で正則となる複素関数に虚数単位 i を乗じると，その実部と虚部が入れ替わり，実部に $-$（マイナス）の符号が付け加わります．その関数も D において正則となるので，速度ポテンシャルと流れの関数は，本質的に対等な共役という関係にあることが分かります．

7 章で述べる複素積分において，正則な領域では湧き出しなどが存在しないので，ある限定された領域に流入する量と流出する量は必ず等しくなります．この性質は，正則な領域内の任意の閉曲線に沿って積分すると 0 になるというコーシーの積分定理が成立する要件になるものと考えられます．

例 題 1　**複素速度ポテンシャルが $w = z^2$ の 2 次元流における流れの関数 ψ と，複素速度 $f(z)$ を求めなさい．**

複素速度ポテンシャル w に $z = x + iy$ を代入すると，次式が得られます．

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy = \phi + i\psi$$

これより，速度ポテンシャル $\phi = x^2 - y^2$，流れの関数 $\psi = 2xy$ が定まり，これらの 3 次元形状は，**図 5-3** の上のようになります．

なお，この曲面は**図 2-6** の第 1 象限（$x \geq 0, y \geq 0$）の部分を切り出したものですが，それらを重ね合わせた後，等高線を上方向から観測すると，下の図に緑と青で示す互いに直交する双曲線群が得られます．

次に，複素速度ポテンシャル w を z で微分すると，

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz}z^2 = 2z = 2x + i2y$$

となり，図の中央に示すように，実部は x 方向の勾配が 2 となる平面，虚部は y 方向の勾配が 2 となる平面で表されます．

最後に上式の複素共役をとると，虚部の $\pm$ の符号が反転し，複素速度 $f(z)$ は，次のように求められます．

$$f(z) = \overline{\left(\frac{dw}{dz}\right)} = 2x - i2y$$

これを表示すると，図の下に示す赤いベクトルのようになります．

なお，速度ベクトル $\boldsymbol{f}$ については，

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -2y$$

より，

$$\boldsymbol{f} = \text{grad}\ \phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{p} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{q} = 2x\boldsymbol{p} - 2y\boldsymbol{q}$$

のように求めることもできます．

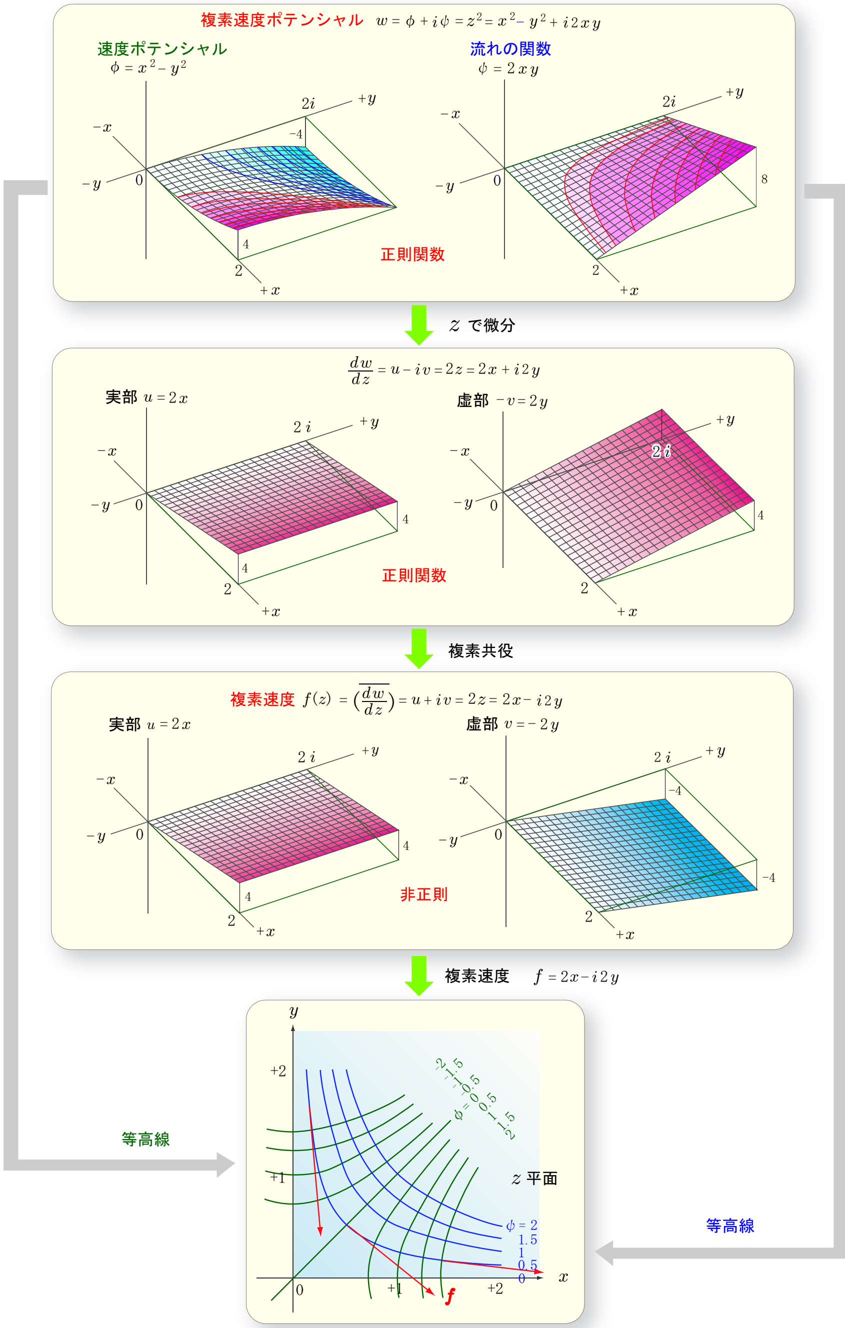

図 5-3 複素速度ポテンシャル $w = z^2$ の 2 次元流

例題 2　**複素速度ポテンシャルが $w = z^3$ の 2 次元流における流れの関数 ψ と，複素速度 $f(z)$ を求めなさい．**

複素速度ポテンシャル w に $z = x + iy$ を代入すると，

$$w = z^3 = (x+iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) = \phi + i\psi$$

となるので，速度ポテンシャル $\phi = x^3 - 3xy^2$，流れの関数 $\psi = 3x^2y - y^3$ が得られます．

これらの 3 次元形状は**図 5-4** の上のようになります．

なお，これらは**図 2-13** の第 1 象限（$x \geq 0, y \geq 0$）の部分を切り出したものですが，それらを重ねて等高線を上から眺めると，下の図に示す緑と青の曲線群になります．

次に，複素速度ポテンシャル w を z で微分すると，

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz}z^3 = 3z^2 = 3(x+iy)^2 = 3(x^2 - y^2) + i6xy$$

となり，図の中央に示す曲面で表されます．

最後に上式の複素共役をとると，虚部の $\pm$ の符号が反転し，複素速度 $f(z)$ は，

$$f(z) = \overline{\left(\frac{dw}{dz}\right)} = 3\overline{z^2} = 3(x^2 - y^2) - i6xy$$

のようになり，図の下に示す赤いベクトルで表されます．

一方，速度ベクトル $\boldsymbol{f}$ については，

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 3(x^2 - y^2) \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -6xy$$

より，

$$\boldsymbol{f} = \mathrm{grad}\ \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\boldsymbol{p} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\boldsymbol{q} = 3(x^2 - y^2)\boldsymbol{p} - 6xy\boldsymbol{q}$$

のようになります．

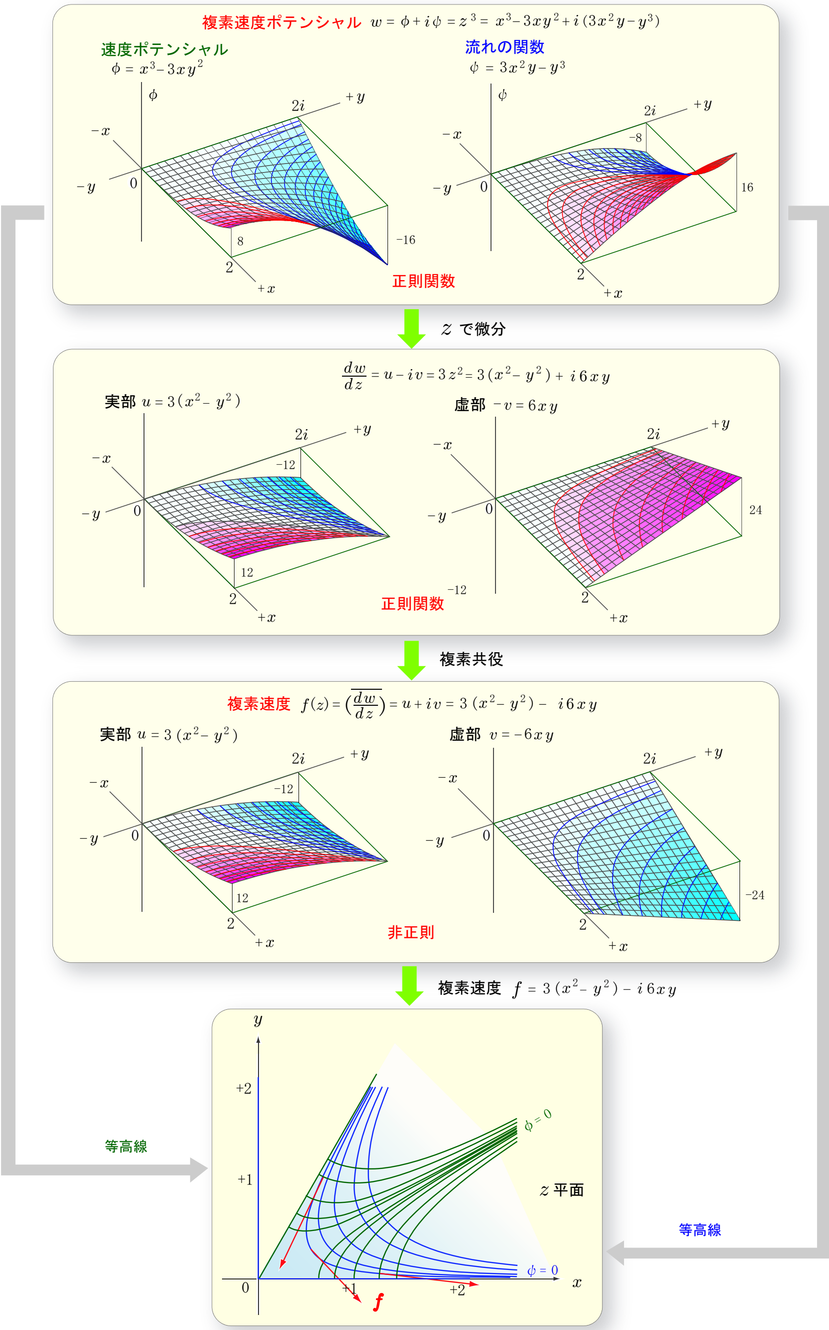

図 5-4　複素速度ポテンシャル $w = z^3$ の 2 次元流

例題 3　**複素速度ポテンシャルが $w = z + \frac{1}{z}$ の 2 次元流における流れの関数 ψ と，複素速度 $f(z)$ を求めなさい．**

複素速度ポテンシャル w に $z = x + iy$ を代入すると，

$$w = z + \frac{1}{z} = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \phi + i\psi$$

となるので，速度ポテンシャル $\phi = x + \frac{x}{x^2+y^2}$，流れの関数 $\psi = y - \frac{y}{x^2+y^2}$ より，その 3 次元形状は**図 5-5** の上のようになります．なお，これらは $w_1 = z$ で表される実部と虚部の勾配がそれぞれ 1 となる 2 つの平面と，先に**図 2-1** で示した $w_2 = \frac{1}{z}$ の形状を重ね合わせたものになっています．

ここで，速度ポテンシャルと流れの関数を重ね合わせ，それらの等高線を上から眺めると，**図 5-6** の緑と青で示す互いに直交する曲線群が得られます．なお，$|z| > 1$ となる単位円の外側の部分が 2 次元流を表しており，その内側は湧き出し点や吸い込み点に相当する極があるので，一般には無視して差し支えありません．

次に，複素速度ポテンシャル w を z で微分すると，

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{z^2} = 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + i\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

となり，図の中央に示す曲面で表されます．

最後に上式の複素共役をとると，虚部の $\pm$ の符号が反転し，複素速度 $f(z)$ は，

$$f(z) = \overline{\left(\frac{dw}{dz}\right)} = 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - i\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

のようになり，**図 5-6** の赤いベクトルで表されます．

一方，複素ベクトル $\boldsymbol{f}$ については，

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

より，次式が導かれます．

$$\boldsymbol{f} = \mathrm{grad}\ \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\boldsymbol{p} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\boldsymbol{q} = \left\{1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right\}\boldsymbol{p} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\ \boldsymbol{q}$$

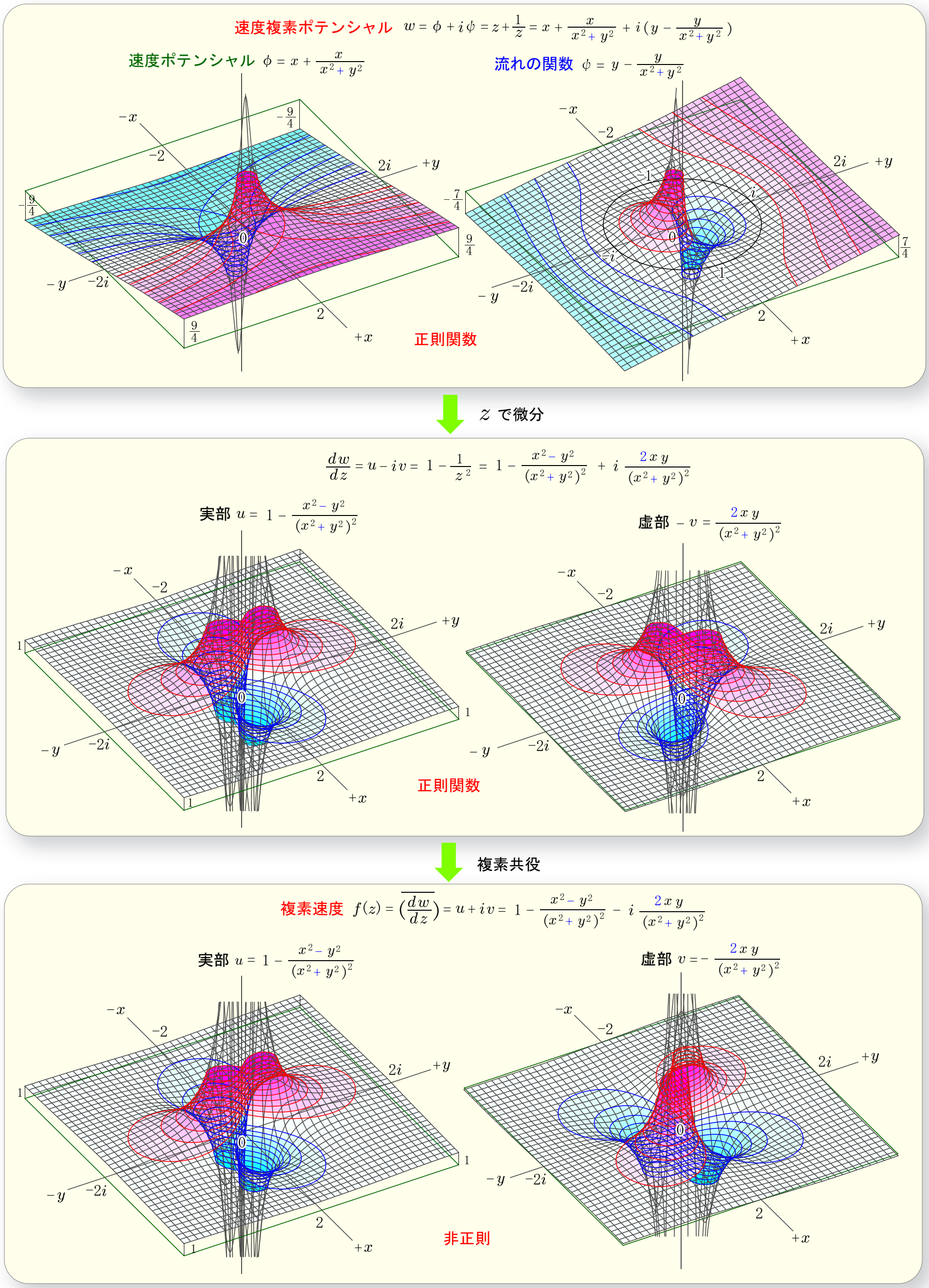

図 5-5　複素速度ポテンシャル $w = z + \frac{1}{z}$ の 2 次元流（その 1）

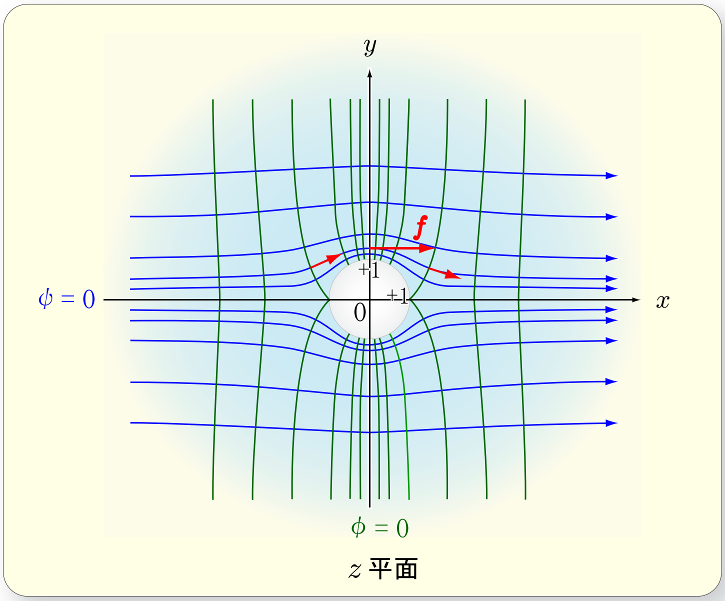

図 5-6　複素速度ポテンシャル $w = z + \frac{1}{z}$ の 2 次元流（その 2）

5.2　演習問題

$\boxed{\textbf{5-1}}$　2 次元流における複素速度ポテンシャルが以下の式で与えられる流れの関数 ψ と，複素速度 $f(z)$ を求めなさい．ただし，a を正の実数とします．

(1) $w = \dfrac{1}{z}$

(2) $w = a \log z$

(3) $w = ia \log z$