まえがき

本書は１年（または１年半）間の微積分学の講義を受講しており，学部から大学院までの物理学・化学・工学の講義で必要とされる数多くの数学分野についての基本的な知識を，短期間で身に付けようとしている学生を特に対象としている。したがって学部２年生，［またはアドバンスト・プレイスメント (訳者註：高大接続の北米版に当たる早期履修プログラム）を受講した新入生］が利用できるように意図されている。またはより上級の学生によって，半ば忘れてしまった単元を概観したり新しい単元を学ぶために，自学自習においてまたは講義において使用されることもあるであろう。本書は特に物理学を専攻する学生向けに書かれているが，あらゆる分野（たとえば数学や数学教育など）の学生が多くの分野を調べたり，深く勉強する時間がない分野の知識を得るのにも役立つ。定理が入念に説明されているので，そのような学生は後の学習の際にそれ以上のことを学ぶ必要はないはずである。

物理系の学生のための適切な数学的訓練という問題は，数学者および数学を応用として使う人々の両方にとって，興味を引くものである。学生が数学の学習をしようとしているなら，注意深くそして徹底的に詳しく学ぶべきだと感じる教員がいるかもしれない。物理学・化学・工学の学部学生にとって，これは（1）数学を専攻する学生よりも多くの数学を学ぶこと，または（2）数学のいくつかの分野のみを徹底的に学び，その他は物理学等の講義のなかで断片的に学ぶこと，のいずれかを意味する。2 番目の選択肢はよく提唱されるものであるが，ここでそれが不満足だと思う理由を述べたい。数学的手法を直ちに応用することで学習意欲が高まるのは確かであるが，欠点も存在する。

1．数学は主な関心事ではないので，議論は大雑把になりがちである。
2．学生は新しい数学的方法を学ぶことと，それを自分にとっては目新しい科学分野に適用することに，同時に直面することとなる。新しい物理分野を理解するのが困難なことは，新しい物理学に対する考え方よりも，数学をきちんと理解していないことによって引き起こされることは，よくあることである。
3．学生はそのつながりを認識することなく，2 つの異なる講義で実際には同じ数学の定理に出会うこともあるし，場合によっては 2 つの講義で明らかに矛盾する定理を学ぶことさえある。たとえば熱力学では，閉路に沿った完全微分の積分は常にゼロであることを学ぶ。電磁気学や流体力学では $\int_0^{2\pi} d\theta$ が出現するが，これはまさに閉路に沿った完全微分の積分であるものの，ゼロに等しくない。

すべての理系学生が微分方程式（常微分および偏微分方程式），より進んだ微積分，線形代数，ベクトルおよびテンソル解析，複素解析，フーリエ級数，確率，変分法，特殊関数などの数学の講義を個別に受講できれば問題ない。しかしほとんどの理系学生は，これほど多くの数

学科目を学習する時間も意思も持ちあわせていない。そのためこれらの科目の基本的な技法が欠如しており，物理学の講義において常に理解が妨げられている。本書の目的は，このような学生が必要とする数学の各分野についての十分な知識を与え，学部初級・上級および大学院初級の物理学の講義にうまく対処できるようにすることである。1 つまたは複数の数学分野に興味を持ち，より深く学習してくれる学生がいることも期待している。

これほど多くの分野を 1 冊の本の中に押し込める場合，何かを省略する必要があることは明らかである。この段階の学生に対して深刻な被害を与えずに，一般性と詳細な証明という 2 つのことを省くことができると，私は信じている。定理を最も一般的な形で記述し証明することは数学者にとっても上級レベルの学生にとっても重要であるが，初級レベルの学生にとっては多くの場合不必要であり，混乱を招く原因ともなるであろう。このことは，理系学生にとって厳密な数学が役に立たないことを意味するわけではない。科学者は数学者よりも，数学の適用可能となる限界についての注意深い説明を必要としている。そのことにより，科学者は妥当性の証明なしに自信を持って数学を使用できる。そのため必要とされる定理については，特殊な場合や証明のない場合でも，正確な説明をするように努力した。興味のある学生は，各分野の教科書でより多くの詳細な説明を容易に見いだすことができるであろう。

大学院レベルの物理数学の教科書では，学部 2 年生のレベルではまだ達成されていない，ある程度の数学的洗練度と高度な物理学の知識を前提としている。しかしそのような知識を持たない学生でも，簡単で明瞭な説明が与えられれば，本書で取り扱かっている技法をすぐに習得することができる。（初級および上級の物理学コースの試験に合格しようとしている場合，そのことができるというだけでなく，何とかしてやり切る必要がある！）このような学生は詳細な応用をおこなう準備ができていない（そしてこのような学生が講義を受けることになる）が，学んでいる手法を使用する何らかの知識が与えられること，およびその簡単な応用をおこなうことを必要としており，また欲している。これが私が新しい題材ごとに，やろうとしていることである。

第 2 版に精通している読者のために，第 3 版の変更点について述べる。

1．第 3 章の行列の対角化に対するいくつかの要求に応えて，第 10 章の最初の部分を第 3 章に移動したうえで，第 10 章でのテンソルの取り扱いを拡大した。また第 3 章を線形ベクトル空間についてより詳細な内容を含むように変更し，第 7 章（フーリエ級数），第 8 章（常微分方程式），第 12 章（微分方程式の級数解），および第 13 章（偏微分方程式）で基底関数の説明をおこなった。

2．同じく要望に応えて，フーリエ積分を第 7 章のフーリエ級数に戻した。これで積分変換の章（旧第 15 章）が分割されたので，この章を放棄してラプラス変換とディラックのデルタ関数の内容を常微分方程式に戻すことを決定した。また，デルタ関数の扱いも拡大した。

3．確率に関する章（旧 16 章）は 15 章となった。そして章の題目を確率と統計に変え，その目的を強調するために，すなわち実験データを扱うために学生が学ぶ法則の背後にある理論を明確にするために，章の後半を修正した。

4．計算に対する技術支援の急速な発展は，その最良の使用法とは何かという，教員にとって悩ましい問題を引き起こしている。そのため私は，特定の数式処理システムを選択することなく，各話題について，コンピュータ使用の有用性と落とし穴の両方を学生に指

摘するように努めた。(この後にある「学生へ」の後半部分を見てほしい。)

本書の内容は，各章を順番どおりに学習する学生が，各段階で必要な背景を持てるように配置されている。ただし，本書の順序に従うことが常に必要，または望ましいわけではない。私が有用であると考える，いくつかの並べ替えを提案しよう。学生が以前に (2 年次での微積分，微分方程式，線形代数などの講義で) 1，3，4，5，6 または 8 章の内容のいずれかを学習したことがある場合は対応する章を省略し，参考文献として使用したり，できれば問題演習に重点を置いて簡単に復習するように利用する。たとえば学生はテイラーの定理を知っているかもしれないが，級数近似を使う程の知識はない。重積分の理論を知っているが，球殻の慣性モーメントを求めるために二重積分を立式するのは難しいかもしれない。微分方程式の解の存在定理を知っているかもしれないが，たとえば $y'' + y = x \sin x$ を解く力がない。問題を解くことは，数学的方法に関する講義の本質的な要素である。

第 7 章 (フーリエ級数) と第 8 章 (常微分方程式) をおこなった後，第 13 章 (偏微分方程式) の最初の 4 節を取り扱うことは，私のお気に入りのやり方である。このような方法で学生に偏微分方程式の紹介をするが，その際にはフーリエ級数展開に関する知識だけが必要である。学生はその後に第 12 章を学習し，そのうえで第 13 章に戻る。第 15 章 (確率と統計) は，本書の他の部分とはほぼ無関係である。私はこの内容を，1 年間におよぶ講義で取り扱ってきた。

第 1・第 2 版への熱心な反応を耳にしてきたことは喜ばしいことであり，またこの第 3 版がより役に立つものとなることを願っている。私は有益な提案をしてくれた多くの読者に感謝したいと思うし，またさらなる提案に対して感謝するであろう。読者がミスプリントを見つけたら，MLBoas@aol.com まで連絡してほしい。(訳者註：本書のミスプリント等については，プレアデス出版に連絡してほしい。) LaTeX 原稿の入力作業をしてくれたワシントン大学の物理学科の学生であるトシコ・アサイ，ジェフ・シャーマン，ジェフリー・フランスカにも感謝したい。数学に関する相談と LaTeX に対する専門的な援助の両方に対して，私の息子ハロルド・ボアズには特に感謝する。

講義で本書を採用した教員は教員用解説書，および第 2 版と第 3 版の両方の版に現れる問題番号を相互に関連付けたリストについて，出版社に相談してほしい。

メアリー・L・ボアズ

学生へ

本書の各主題の学習を始める際に，あなたは間違いなく戸惑い，そして以下のように尋ねるであろう。「なぜ私はこの主題を学習すべきなのでしょうか。そして応用場面で，それらはどのように使われるのでしょうか。」ある年老いた教授に，「学生から数学の主題の実用的な応用について尋ねられたら，あなたはどのようには答えますか。」と尋ねた若い数学講師の話をしよう。経験豊富な教授は「私はそのことについて，きちんと話す。」と言った。本書はこのアドバイスに従うが，あなたの側でも，そのような要求は合理的なものでなければならない。1冊の本や１つの講義で，数学的方法とその数多くの詳細な応用の両方を網羅することは，不可能である。あなたは各題目の応用範囲に関するいくばくかの情報と，単純な応用で満足する必要がある。その後の講義で，ここで学んだ手法をより高度な応用に使うことになるであろう。その際には，新しい数学的方法を学ぶことで気を散らされることを心配することなく，物理的な応用に集中することができるであろう。

あなたが本書を学習するに際して，以下の点については強調しすぎることはないであろう。応用の場面で数学を効果的に使用するには，知識だけでなく計算技能も必要である。計算技能は演習を通してしか得ることはできない。あなたは講義を聞くことによって，数学の表面的な知識を得ることができるだろうが，この方法で計算技能を得ることはできない。「先生がやるのはとても簡単に見えます。」または「数学の理論はわかりますが，問題を解くことができません。」と言う学生をどれほど多く見てきたであろうか。そのような声は問題演習をおこなう機会の欠如，およびその結果としての計算技能の欠如を示している。今後の講義で，本書の内容を使用する際に必要となる計算技能を伸ばす唯一の方法は，多くの問題を解く練習をすることである。常に鉛筆と紙を用意して，手計算をしてほしい。解かれた例題を単に読んでいるのではなく，自分でやってみよう。その後に解答が示された例のなかから最も適切な方法を選択することを考えながら，各節に置かれた問題から類似したものをいくつか解いてみよう。選択した問題に対する解答を参照し，自分の解答と比べてほしい。なじみのない用語に出会った場合は，索引（または専門用語ではない場合は辞書）で探してほしい。

学生たちによると，「あなたは，あまりにも一生懸命頑張りすぎている」と私は頻繁に口にしているようである。より良い方法なら数分で解ける問題を解くのに，何時間も費やすことに値打ちはない。問題を解く技法を「まやかし」や「抜け道」と批判している人がだれであろうが，無視してほしい。あなたが受けている講義において，問題を解くための効果的な方法を選択できるようになればなるほど，新しい題材を習得するのは容易となる。しかしそのためには，練習を繰り返す必要がある。問題を解くことを学ぶ唯一の方法は，問題を解くことである。本書では基本的な問題と，より困難で挑戦的な問題の両方が用意されている。ある程度の数のこれ

らの問題を解けるようになるまで，あなたはその章の学習に満足してはいけない。

あなたは「私はこれらの数学を，まったく学習する必要はない。私のためにコンピュータがすべての問題を解いてくれるであろう。」と考えているかもしれない。数式処理システムは素晴らしいものである。ご存知のように，数式処理システムは多くの面倒な計算から我々を解放してくれ，また問題を明確にするグラフを素早く描いてくれる。しかしコンピュータは道具に過ぎず，それを使うのはあなたである。とても鋭い洞察力を持つ学生が，(特定の研究課題のためにコンピューターを使用することに関して)，最近私に言ったことがある。「まず自分が問題を解く方法を学ぶ。するとその問題を簡単に解くために，コンピューターができることがわかる。」全くそのとおり！新しい手法を学習するための極めて効果的な方法は，計算過程を理解し，手計算でいくつかの簡単な問題を解き，自分の出した結果とコンピュータが出した解と比較することである。そうすれば上級の講義において，より複雑な同様の応用問題を設定して解くための方法を，より上手に使えるようになるであろう。したがって一連の問題の中でいくつかの単純な問題を解くことの目的は，(コンピュータが容易に導き出すことができる）答えを得ることではなく，今後の講義において極めて役に立つ考え方や技法を学ぶことにあることを，忘れないでほしい。

M・L・B

目次

第2章 複素数 45

第3章 線形代数 81

第11章　特殊関数　529

第12章　微分方程式の級数解：ルジャンドル，ベッセル，エルミート，ラゲール関数　553