

まえがき

本書の主題は時空の構造である，長さのスケールにして，素粒子の半径 10^{-13}cm から，宇宙の半径 10^{28}cm までに渡る話である．第 1 章から第 3 章で説明する理由により，本書は Einstein の一般相対性理論を基礎に置く．この理論は宇宙について 2 つの顕著な予言をもたらす．第 1 は，大質量星の最終的な運命が特異点を含む『ブラックホール』を形成するために，事象の地平面の背後に潰れてしまうことである．そして第 2 は我々の過去に特異点が存在し，それがある意味では宇宙の始まりになっているということである．本書での議論は主としてこれら 2 つの結果を詳しく説明することに向けられている．それらは主として 2 つの領域の研究の成果である．1 つ目は時空内の時間的^{タイムライク}な曲線と null^{ヌル}的な曲線の族の振る舞いについての理論であり，2 つ目は任意の時空内の様々な因果関係の性質についての研究である．本書ではこれらの主題について詳細に検討する．これに加え，与えられた初期データからの Einstein 方程式の解の時間発展の理論も詳しく説明する．議論の補足として，Einstein の場の方程式のいろいろな厳密解の大域的性質を検討する．それらの多くは思いのほか予想外の振る舞いを見せることになる．

本書の一部は筆者のうちの一人 (S. W. Hawking^{ホーキング}) による Adams Prize^{アダムズ賞}受賞の小論に基づく．ここで紹介するアイデアの多くは，R. Penrose^{ペンローズ}と R. P. Geroch^{ゲロック}によるものであり，我々は彼らの助けに感謝している．我々は，Battelle Rencontres (Penrose (1968)), Midwest Relativity Conference Report (Geroch (1970c)), Varenna Summer School Proceedings (Geroch (1971)) 及び Pittsburgh Conference Report (Penrose (1972b)) などの書評論文を参照するだろう．我々は多くの方々，特に B. Carter^{カーター}や D. W. Sciama^{シアマ}からの議論と提案の恩恵を受けている．我々は彼ら全てに感謝している．

ケンブリッジ
Cambridge

1973 年 1 月

S. W. Hawking
G. F. A. Ellis^{エリス}

目次

まえがき	i
花文字表	ii
第 1 章 重力の役割	1
第 2 章 微分幾何	9
2.1 多様体	9
2.2 ベクトルとテンソル	14
2.3 多様体間の写像	21
2.4 外微分とLie微分	24
2.5 共変微分と曲率テンソル	29
2.6 メトリック 計量	36
2.7 超曲面	43
2.8 体積要素とGaussの定理	47
2.9 ファイバーバンドル	49
第 3 章 一般相対論	55
3.1 時空多様体	55
3.2 物質場	57
3.3 ラグランジアン Lagrangianを用いた定式化	62
3.4 場の方程式	69
第 4 章 曲率の物理的意義	75
4.1 タイムライク 時間的曲線	75
4.2 ヌル null曲線	82
4.3 エネルギー条件	84
4.4 共役点	92
4.5 弧長の変分	97
第 5 章 厳密解	113

5.1	ミンコフスキー ド・ジッター Minkowski時空	114
5.2	de Sitter時空と反 de Sitter 時空	119
5.3	Robertson-Walker時空	128
5.4	空間的に一様な宇宙モデル	135
5.5	シュワルツシルト Robertson-Walker Schwarzschild解とReissner-Nordsröm解	141
5.6	カー Kerr解	152
5.7	ゲーデル Gödel宇宙	159
5.8	タウブ・ナット Taub-NUT空間	161
5.9	さらなる厳密解	168
第 6 章	因果構造	169
6.1	向き付け可能性	169
6.2	因果曲線	170
6.3	非時間順序的境界 (achronal boundaries)	174
6.4	因果条件	176
6.5	コーシー Cauchy発展	187
6.6	大域的双曲性	192
6.7	測地線の存在	198
6.8	時空の因果的境界	202
6.9	漸近的に単純な空間	205
第 7 章	一般相対論におけるコーシー Cauchy問題	211
7.1	問題の性質	212
7.2	簡約化されたEinstein方程式 アインシュタイン	212
7.3	初期データ	214
7.4	2 階の双曲型方程式	217
7.5	真空中のEinstein方程式の発展の存在と一意性 アインシュタイン	227
7.6	極大発展と安定性	231
7.7	物質を含むEinstein方程式 アインシュタイン	235
第 8 章	時空特異点	237
8.1	特異点の定義	237
8.2	特異点定理	241
8.3	特異点の記述	253
8.4	特異点の特徴	261
8.5	閉じ込められた不完備性	265
第 9 章	重力崩壊とブラックホール	275
9.1	星の崩壊	275

9.2	ブラックホール	283
9.3	ブラックホールの最終的な状態	295
第 10 章	宇宙の初期特異点	317
10.1	宇宙の膨張	317
10.2	特異点の性質と意義	328
付録 A	Peter Simon Laplace の論文の翻訳	333
付録 B	球対称解と ^{バーコフ} Birkhoff の定理	337
参考文献		341
記法		351
訳者あとがき		355
索引		357

第 1 章

重力の役割

現在もっとも一般的に受け入れられている物理学の考え方は、宇宙についての議論が次の 2 つの部分に分けられるとするものである。1 つ目は、様々な物理的な場によって満足される局所的な法則についての問題に関するものである。これは大抵微分方程式の形で表現される。2 つ目は、これらの微分方程式の境界条件の問題とそれらの微分方程式の大域的性質についての問題である。この問題はある意味時空の edge(縁) ^{ふち} について考えることを伴う。上に述べた 2 つの部分は互いに独立ではありえない。実際、局所的な法則は宇宙の大域的構造によって決定されると思われる。この見方は一般的には Mach ^{マッハ} の名に結びつけられている。また、もっと最近では、Dirac ^{ディラック} (1938), Sciama ^{シ ア マ} (1953), Dicke ^{ディッケ} (1964), Hoyle and Narlikar ^{ホ イ ル ナーリカー} (1964), などの他多数の研究がある。本書では余り大がかりなアプローチを取るのは止そう。すなわち、本書では、実験的に決定された局所的な物理法則を採用し、これらの法則が宇宙の宇宙の大域的構造について示唆するものを確認しよう。

もちろん、実験室で決定される物理法則が、条件が非常に異なる可能性がある時空の別の点で当てはまらなければならないというのは大掛かりな仮定である。もしそれらが保たれないなら、局所的物理法則に何らかの他の物理的場が混入しているという見解をとるべきである。しかしそのようなものの存在は実験ではまだ検出されていない。何故なら、太陽系のような領域の上ではそのような物理的場はごくわずかにしか変化しないからである。実は我々の結果のほとんどは物理法則の細かい性質とは無関係であり、ただ次のような一般的な性質のみを立脚点としている。その一般的な性質とは、時空が擬リーマン幾何学で表せるということと、エネルギーが正定値であるということである。

現在、物理学において知られている基本的な相互作用は 4 つの種類に分けられる。強い相互作用と弱い相互作用、電磁気力、そして重力である。これらのうち、重力は最も弱い (2 つの電子の間に働く電磁力への重力の比率 Gm^2/e^2 ^{*1} は、およそ 10^{-40} である。)。それにもかかわらず、重力は宇宙の大規模構造を形成する上で支配的な役割を果たす。これは強い相互作用と弱い相互作用は非常に短い範囲 ($\sim 10^{-13}\text{cm}$ 以下) にしか働かず、電磁気力が長距離相互作用であっても巨視的な次元の物体に対しては、逆の電荷の引力によって、同符号の反発力は非常に近くでつり合いがとれているからである。一方重力は常に引力として現れる。それ故物体を構成するすべての粒子の作る重力場は、十分大きな物体に対しては場を作るために加算され、他の全ての力を支配する。

重力は巨視的なスケールで支配的な力であるだけでなく、それは同じように全ての粒子に影響を及ぼす力である。この普遍性は Galileo ^{ガリレオ} によって最初に認識された。Galileo はどんな 2 つの物体も同じ速度で落下することに気付いた。これは Eötvös ^{エトヴエシュ}、及び、Dicke と彼

*1 訳注：ここで採用しているのは CGS 静電単位系である。SI 単位系では $4\pi\epsilon_0$ が付く。

の共同研究者 (Dicke (1964)) によるより最近の実験において非常に高い精度で検証されている。また、重力場によって光が湾曲することも観測されている。いかなる信号も光より速くは伝わらないと考えられることから、これは重力が宇宙の因果関係の構造を決定することを意味する。すなわち、重力は時空の事象がお互いに因果的に関係することができるかどうかを決定するのである。重力のこれらの性質は、もし十分大きな量の物質が、ある領域に集中すると、その物質はその領域から出射する光を内側に引きずりこむほど湾曲させることができるという厳しい問題を導きだす。これはLaplace^{ラプラス}によって 1798 年に認識された。Laplace は太陽とほぼ同じ密度で 250 倍の半径を持つ物体は、いかなる光もその表面から逃れることができないほど強い重力場を及ぼすと指摘した。このことがこんなに昔に予言されたということは、あまりにも驚異的なので、本書の巻末に Laplace の小論を翻訳したものを付けることにする。

Penrose^{ペンローズ}の捕捉閉曲面の考え方をうけてもっと正確に、大質量の物体が光を引きずり戻すということを、説明することができる。物体を取り巻く球面 $\mathcal{S}$ を考えよう。ある瞬間 $\mathcal{T}$ が、閃光を発したとする。ある時間後の t に、 $\mathcal{S}$ から出て内側へ向かう波の先端と外側へ向かう波の先端は、それぞれ球面 $\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_2$ を、形成するだろう。普通の状況では、 $\mathcal{S}_1$ の面積は、 $\mathcal{S}$ の面積よりも小さいだろう (なぜなら、内側へ向かう光を表しているから)。また、 $\mathcal{S}_2$ の面積は、 $\mathcal{S}$ の面積よりも大きいだろう (なぜなら、外側へ向かう光を表しているから。図 1 参照)。しかしながら、十分に多くの量の物質が $\mathcal{S}$ の中に閉じ込められたとすると、 $\mathcal{S}_1$ の面積も $\mathcal{S}_2$ の面積も両方とも、 $\mathcal{S}$ の面積より小さくなるだろう。このとき、面 $\mathcal{S}$ は、捕捉閉曲面と呼ばれる。 t が増加するにつれて、重力が引力であり続ける限り、つまり物質のエネルギー密度が負にならない限り、 $\mathcal{S}_2$ の面積はますます小さくなる。 $\mathcal{S}$ 中の物質は、光よりも速く運動できないために、有限の時間のうちにその境界がゼロになってしまう領域の中に、捕捉されている。このことは、具合の悪いことに、何かが間違っていることを、提示している。実は私達は、そのような状況では時空の特異点が、必然的に現れるということを、ある扱いやすい条件が成り立つことを前提として、証明することとなる*2。

特異点とは、現在の我々の物理法則が、破綻する場所だと考えることもできる。さもなくば、特異点とは時空の edge(縁)の部分を表していて、ただし無限遠ではなく有限の距離にあるものだと考えることもできる。この見方では、特異点はそれほど悪いものではない。ただし、まだ境界条件の問題は残されている。言い換えれば、特異点から何が出てくるかはわからないのである。

*2 訳注：原書で用いられている英単語の ‘singularity’ は通常 ‘特異点’ と訳されるが、この英単語はもともと点のみに限定されず、空間的に広がった特異な領域にも用いられる。本書でも慣例に従い、特異点と言ったらこの意味で使用する。

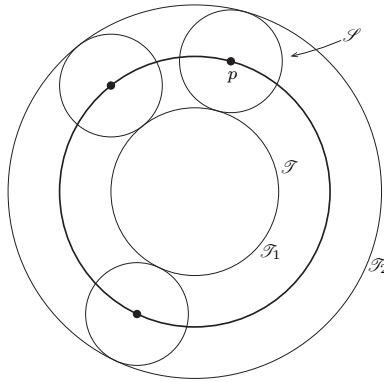


図 1. ある瞬間、球面 $\mathcal{T}$ は光の閃光を放出する．そののち、点 p からくる光は p の周りに球面 $\mathcal{S}$ を形成し、包絡面 $\mathcal{T}_1$ 及び $\mathcal{T}_2$ はそれぞれ内側に進む波面と外側に進む波面を形成する．もし $\mathcal{T}_1$ 及び $\mathcal{T}_2$ の両方の面積が $\mathcal{T}$ より小さいならば、 $\mathcal{T}$ は捕捉閉曲面である．

捕捉閉曲面を生じさせるのに十分な物質の集中があると期待される 2 つの状況がある．第 1 の状況は太陽の 2 倍を超える質量の星の重力崩壊である．それはそれらの星が核燃料を使い果たした時に起こると予想される．この状況では、外部の観測者から見ることでできない特異点に星が潰れることが期待される．第 2 の状況は宇宙全体それ自体の物質の集中である．マイクロ波背景放射の近年の観測は、宇宙が時間反転捕捉閉曲面を引き起こすのに十分な物質を含んでいることを示している．これはかつて、現在の宇宙の膨張の始まりに特異点が存在していたことを意味する．この特異点は原理的には我々が見ることができる．それは宇宙の始まりと解釈できる．

本書では アインシュタイン Einstein の一般相対性理論に基づいて時空の大域的構造を学ぶ．この理論の予言はこれまで行われたすべての実験と一致している．しかしながら、ここでの処置は ブランス・ディッケ Brans-Dicke 理論のような Einstein の理論を修正した理論をも含むほど十分一般的に取り扱いをすることとする．

本書は読者のほとんどに一般相対論に対する何らかの知識を持っていることを想定しているけれども、単純な微積分学、代数学、点集合論的位相空間論についての知識を除いて自己完結な本になるように書こうと筆者たちは努力した．そこで本書では第 2 章を微分幾何学に充てた．明白に座標系に依存しない流儀で定義を定式化したという点で本書の処置は十分現代的である．しかしながら、計算上の利便性のため、本書では時々添字を使い、大部分でファイバーバンドルの使用を避けた．ある程度微分幾何学の知識のある読者はこの章を飛ばしてもよい．

第 3 章では一般相対性理論の定式化が、時空の数理モデルについての 3 つの仮定に関して与えられる．このモデルは ローレンツ Lorentz 符号を持つ メトリック 計量 g のある多様体 M である．計量の

物理的意義は最初の2つの仮定によって与えられる．局所因果律及び局所エネルギー-運動量保存則である．これらの仮定は一般及び特殊相対性理論の両方で共通で，後者に対する実験的な証拠によって支持される．第3の仮定，計量 g に対する場の方程式は，あまりよく実験的に確立されていない．しかしながら，大部分の結果は，正の物質密度に対して重力が引力的であるような場の方程式の性質のみに依存する．この性質は，一般相対論や，Brans-Dicke 理論のような修正理論において共通である．

第4章では，^{タイムライク}時間的及び^{ヌル}null測地線の族に対する曲率の影響を考察することによって，曲率の重要性を議論する．これらはそれぞれ，小さな粒子や光線の経路を表す．曲率は，隣接する測地線との間の相対加速度を誘導する偏差または潮汐力と解釈することができる．エネルギー-運動量テンソルが，ある正定値条件を満たすなら，この偏差力は測地線の非回転族上に正味の収束効果を常に持つ．^{レイチャウドリ}Raychaudhuriの方程式 (4.26) の使用によって，これがその後，隣接する測地線が交差するところで，焦点または共役点をもたらすことを示すことができる．

これらの焦点の重要性を確認するために，2次元^{ユークリッド}Euclid空間内の1次元面 $\mathcal{S}$ を考えよう (図2)．

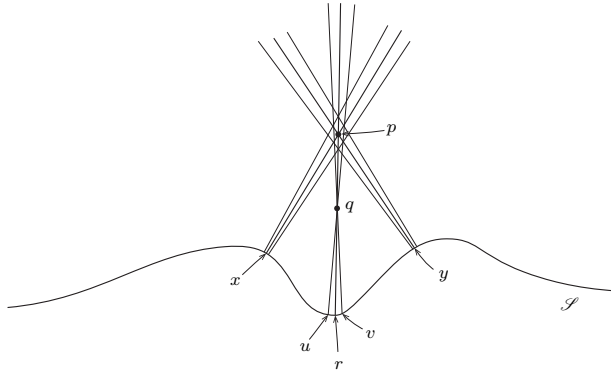


図2. 線分 pr は p から $\mathcal{S}$ への最短曲線ではない．何故なら p と r の間に焦点 q が存在するからである．実際線分 px と py のいずれかが p から $\mathcal{S}$ への最短曲線である．

p を $\mathcal{S}$ 上でない点としよう．すると，どんな他の $\mathcal{S}$ から p への曲線よりも短い，同じぐらい短い $\mathcal{S}$ から p へのある曲線が存在する．明らかにこの曲線は測地線である．すなわち，直線であり， $\mathcal{S}$ と直交的に交わる．図2に示した状況では，実際， p を通り $\mathcal{S}$ と直交する3つの測地線が存在する．点 r を通過する測地線は明らかに $\mathcal{S}$ から p への最短曲線ではない．これを認識する1つの方法^{ミルナー}(Milnor (1963)) は， u と v を介して $\mathcal{S}$ に対して直交する隣り合う測地線は $\mathcal{S}$ と p の間の焦点 q で r を介する測地線と交わるという