

# 目次

著者について	i
まえがき	ix
第1章 序論	1
一般相対論の概要	2
量子論の簡単な入門	4
標準模型	9
重力場を量子化する	10
弦理論におけるいくつかの基本的な解析	11
統一と基本定数	12
弦理論の概要	15
まとめ	22
章末問題	22
第2章 古典的弦 I: 運動方程式	25
相対論的粒子	26
時空における弦	33
弦に対する運動方程式	38
Polyakov作用	41
数学的な話: オイラー標数	42
光錐座標	45
波動方程式の解	49
自由端を持つ開弦	51
閉弦	53

---

固定端を持つ開弦 . . . . .	54
ポアソン括弧 . . . . .	56
章末問題 . . . . .	57
<b>第 3 章 古典的弦 II: 対称性と世界面カレント</b>	<b>59</b>
エネルギー-運動量テンソル . . . . .	59
ポリヤコフ作用の対称性 . . . . .	61
平坦な世界面計量に変換する . . . . .	68
ポアンカレ不変性から得られる保存カレント . . . . .	73
ハミルトニアン . . . . .	77
まとめ . . . . .	77
章末問題 . . . . .	77
<b>第 4 章 弦の量子化</b>	<b>79</b>
共変量子化 . . . . .	79
閉弦に対する交換関係 . . . . .	84
開弦に対する交換関係 . . . . .	86
開弦のスペクトル . . . . .	87
閉弦のスペクトル . . . . .	96
光錐量子化 . . . . .	99
まとめ . . . . .	102
章末問題 . . . . .	103
<b>第 5 章 共形場理論</b>	<b>105</b>
弦理論における共形場理論の役割 . . . . .	109
ウィック回転 . . . . .	110
複素座標 . . . . .	111
共形変換の生成子 . . . . .	115
2次元共形群 . . . . .	118
中心拡大項 . . . . .	123

---

閉弦の共形場理論 . . . . .	123
ウィック展開 . . . . .	127
演算子積展開 . . . . .	130
まとめ . . . . .	135
章末問題 . . . . .	135
<b>第 6 章 BRST 量子化</b> . . . . .	<b>137</b>
BRST 演算子と入門的備考 . . . . .	138
BRST 不変状態 . . . . .	141
弦理論-CFT における BRST . . . . .	143
BRST 変換 . . . . .	145
非ゴースト定理 . . . . .	150
まとめ . . . . .	150
章末問題 . . . . .	150
<b>第 7 章 RNS 超弦</b> . . . . .	<b>151</b>
保存カレント . . . . .	158
エネルギー-運動量テンソル . . . . .	162
モード展開と境界条件 . . . . .	166
超ヴィラソロ生成子 . . . . .	170
正準量子化 . . . . .	171
超ヴィラソロ代数 . . . . .	172
開弦のスペクトル . . . . .	174
GSO 射影 . . . . .	176
臨界次元 . . . . .	177
まとめ . . . . .	178
章末問題 . . . . .	178
<b>第 8 章 コンパクト化と T-双対性</b> . . . . .	<b>181</b>
25 番目の次元のコンパクト化 . . . . .	181

修正された質量スペクトル . . . . .	184
閉弦に対する T-双対性 . . . . .	188
開弦と T-双対性 . . . . .	191
D-ブレーン . . . . .	195
まとめ . . . . .	196
章末問題 . . . . .	196
<b>第 9 章 超弦理論の続き</b>	<b>197</b>
超空間と超場 . . . . .	198
世界面超対称性に対する超場 . . . . .	202
グラスマン積分 . . . . .	204
明らかな超対称的作用 . . . . .	205
グリーン-シュワルツ作用 . . . . .	207
時空の超対称性と弦 . . . . .	212
光錐ゲージ . . . . .	213
正準量子化 . . . . .	217
まとめ . . . . .	219
章末問題 . . . . .	219
<b>第 10 章 超弦理論のまとめ</b>	<b>221</b>
超弦理論の概要 . . . . .	221
超弦理論 . . . . .	224
双対性 . . . . .	228
章末問題 . . . . .	229
<b>第 11 章 II 型弦理論</b>	<b>233</b>
R および NS セクター . . . . .	233
スピン場 . . . . .	238
II A 型弦理論 . . . . .	239
II B 型理論 . . . . .	241

---

異なるセクターのゼロ質量スペクトル . . . . .	242
まとめ . . . . .	244
章末問題 . . . . .	244
第 12 章 ヘテロティック弦理論 . . . . .	247
$SO(32)$ 理論の作用 . . . . .	249
$SO(32)$ 理論の量子化 . . . . .	250
ゼロ質量スペクトル . . . . .	256
コンパクト化と量子化された運動量 . . . . .	258
まとめ . . . . .	262
章末問題 . . . . .	262
第 13 章 D-ブレーン . . . . .	265
時空の舞台 . . . . .	267
量子化 . . . . .	270
超弦理論における D-ブレーン . . . . .	278
複数の D-ブレーン . . . . .	278
タキオンと D-ブレーン崩壊 . . . . .	284
まとめ . . . . .	287
章末問題 . . . . .	287
第 14 章 ブラックホール . . . . .	289
一般相対論におけるブラックホール . . . . .	291
電荷を帯びたブラックホール . . . . .	294
ブラックホールの力学法則 . . . . .	297
ブラックホールの温度を計算する . . . . .	299
ブラックホールのエントロピーを弦理論で計算する . . . . .	301
まとめ . . . . .	308
章末問題 . . . . .	308

---

第 15 章	ホログラフィー原理と AdS/CFT 対応	309
	ホログラフィー原理の言明 . . . . .	310
	AdS/CFT 対応の定性的説明 . . . . .	311
	ホログラフィー原理と M 理論 . . . . .	312
	さらなる対応 . . . . .	315
	まとめ . . . . .	317
	章末問題 . . . . .	317
第 16 章	弦理論と宇宙論	319
	アインシュタイン方程式 . . . . .	319
	インフレーション . . . . .	321
	カスナー計量 . . . . .	323
	ランドール-サンドラムモデル . . . . .	329
	ブレーンワールドとエキピロティック宇宙 . . . . .	332
	まとめ . . . . .	336
	章末問題 . . . . .	336
巻末問題		339
章末問題の解答		347
巻末問題の解答		353
参考文献		359
	書籍 . . . . .	359
	論文とウェブサイト . . . . .	360
訳者あとがき		361
索引		364

$$\begin{aligned}
 &= -\sqrt{\frac{-m^2(-\dot{X}^2)}{-1}} \\
 &= -m\sqrt{-\dot{X}^2}
 \end{aligned}$$

のようになる。

したがって、作用は

$$\begin{aligned}
 S' &= \frac{1}{2} \int d\tau \left( \sqrt{\frac{-m^2}{\dot{X}^2}} \dot{X}^2 - m\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int d\tau \left( -m\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu} - m\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu} \right) \\
 &= -m \int d\tau \left( \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu} \right) = S
 \end{aligned}$$

となり、2つの作用が同等であることを示している。

## 時空における弦

現時点まで我々は、自由な相対論的粒子に対する運動方程式の計算に役立つ基本的な手法を吟味してきた。この作業を時空上の弦が動く場合に則って拡張したい。点粒子は一切の大きさも持たないので、0次元の物体として描かれる。我々は、(0次元的な)点粒子が世界線という時空上の道のり又は線(1次元)を描いて通るという説明で、その運動が描かれることを見てきた。弦は、点粒子とは異なって1次元上にいくらかの広がりを持つので、1次元的な物体となる。(1次元的な)弦が移動すると、科学者達が世界面とよぶ時空上の2次元曲面を描いて通ることになる。一例として、閉じた輪の弦が時空上を動いていく様を想像して欲しい。図2.1に示したように、この場合の世界面は管になるだろう。

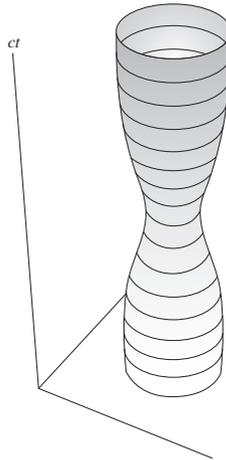


図 2.1: 時空において閉弦が描く世界面は管 (tube) となる.

これらは以下のように要約できる :

- 点粒子が通る道は時空上で線となる. その線は 1 個のパラメーター (固有時) でパラメーター化される.
- 時空を移動する弦は世界面と呼ばれる 2 次元曲面を描いて通る. このため, 世界面は 2 次元的となり,  $\sigma^0$  と  $\sigma^1$  で表される 2 個のパラメーターを必要とする.

局所的に座標  $\sigma^0$ ,  $\sigma^1$  は世界面上の座標と考えることができる. あるいは, 世界面のパラメーター化とするもう 1 つの方法を見ていくためには, 弦の固有時および空間的な広がり構成する必要がある. そのようにして, 最初のパラメーターは再び固有時  $\tau$  となり, 2 個目のパラメーターは,  $\sigma$  で表される, 弦の長さに結び付けられる :

$$\sigma^0 = \tau \quad \sigma^1 = \sigma$$

世界面の座標  $(\tau, \sigma)$  は次の関数 (弦座標という) によって時空上に写像さ

れる。

$$X^\mu(\tau, \sigma) \quad (2.12)$$

そうすると弦の時間と空間的位置は  $(d + 1)$  次元の空間座標

$$\{X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma)\}$$

として写像される。

ここで、式 (2.8) を新しい高次元世界 (世界面) に一般化し、弦の作用を記述する必要がある。それは次の方法でなされる。点粒子の作用が世界線の長さ に比例することを思い出して欲しい [式 (2.5)]. ちょうど、弦が時空の 2 次元世界面を描いて通ることを述べた。このことは、もし点粒子作用の記述を一般化するつもりなら、弦の作用は世界面の表面積に比例する可能性があることを示している。これは実際そうなる。この作用を

$$S = -T \int dA \quad (2.13)$$

として書くことができ、比例定数は弦の張力であることが予想される。ここで、 $dA$  は世界面領域の微小要素である。 $dA$  の形を求めるために、微小線要素  $ds^2$  を考えることから始め、世界面上の座標を  $\sigma^0 = \tau, \sigma^1 = \sigma$  として導入する。ちょっとした代数計算を行うことで、

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \\ &= -\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^\beta} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta \end{aligned}$$

を得る。これにより我々は世界面上に誘導計量を定義できる。これは以下のように与えられる。

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^\beta} \quad (2.14)$$

この計量は世界面上の距離を決定する。この計量を“誘導”と呼ぶのはその定義式に背景となる時空の計量を含むためである (ここでは時空が平坦であ

るとしている)ので  $\eta_{\mu\nu}$  を使っている). すなわち, 世界面の表面上ではこの計量が新しい距離の尺度となるのであるが, その距離の尺度は背景となる時空の計量を通して決定される (一般には  $\eta_{\mu\nu}$  とはならない). 先に進むと, 今我々は

$$ds^2 = -h_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

を持っている. そして, 記法

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \quad X^{\mu'} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$$

を用いると (平坦時空の場合に対する) 誘導計量の成分を

$$\begin{aligned} h_{\tau\tau} &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X^\nu}{\partial \tau} = \dot{X}^2 \\ h_{\sigma\tau} &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X^\nu}{\partial \tau} = X' \cdot \dot{X} = \dot{X} \cdot X' = h_{\tau\sigma} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \quad (2.15) \\ h_{\sigma\sigma} &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} = X'^2 \end{aligned}$$

と書ける.

式 (2.15) を使うことで, 空間  $(\tau, \sigma)$  における誘導計量を行列として書くことができる.

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & X'^2 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

ここで, この行列の行列式が

$$h = \det h_{\alpha\beta} = \dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} \cdot X')^2 \quad (2.17)$$

のように与えられることに注意して欲しい. 最初に立ち返り, 作用の式を探し求めてみよう.

$$S = -T \int dA$$

我々は、初等的な微積分法から、計量  $G_{\alpha\beta}$  によって記述される特定の空間において、表面積の要素が

$$dA = \sqrt{-\det G_{\alpha\beta}} d^2\xi$$

で与えられることを知っている<sup>\*5</sup>。今回の場合、必要としている計量は誘導計量であるから [式 (2.15)],  $dA = \sqrt{-\gamma} d\tau d\sigma$  とする。もし、ある初期固有時  $\tau_i$  から終端固有時  $\tau_f$  にかけて積分し、さらに弦の長さにもわたる積分も実行したとき ( $\ell$  と表すことにする), 弦の作用は,

$$S = -T \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\ell d\sigma \sqrt{-\gamma} \quad (2.18)$$

または、式 (2.17) を使って、

$$S = -T \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\ell d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2} \quad (2.19)$$

と明示的に書ける。式 (2.18) および式 (2.19) の作用は南部-後藤作用と呼ばれ、相対論的 (古典) 弦の力学を記述している。時空における点粒子の運動が世界線の長さを最小化する<sup>\*6</sup> 働きを持つように、古典弦も世界面の表面

<sup>\*5</sup>訳注：通常のユークリッド空間  $\mathbb{R}^d$  内に存在する無限に細長い膜の座標を  $(\tau, \sigma)$  とする場合、膜上の面積要素は、ベクトル  $du^i = \dot{X}^i d\tau$  と  $dv^i = X'^i d\sigma$  の張る平行四辺形の面積でそれは

$$\begin{aligned} |du||dv|\sin\theta &= |du||dv|\sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{|(du)^2(dv)^2 - (du \cdot dv)^2|} \\ &= \sqrt{\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} \cdot X')^2} d\tau d\sigma = \sqrt{\begin{vmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & X'^2 \end{vmatrix}} d\tau d\sigma \end{aligned}$$

となる。ここでルートの中身の符号はコーシー-シュワルツの不等式  $(\dot{X} \cdot X')^2 \leq \dot{X}^2 X'^2$  によって得られるが、今考えている世界面座標では (時間的な接ベクトルと空間的な接ベクトルが存在すると指定すると) 符号が反転する。また内積 (自乗も含む) もミンコフスキー時空のものにしなければならない。詳しくはツヴィーバツハ [著] 樺沢宇紀 [訳] 『初級講座弦理論 基礎編』P109 参照。

<sup>\*6</sup>訳注：ここでの世界線の長さはユークリッド空間で測った世界線の長さの方であり、 $\int ds = \int \sqrt{d\tau^2 - \sum_{i=1}^d dx^2} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{1 - \sum_{i=1}^d \left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)^2} d\tau$  ではない。このため、経路長が最短になるとき、固有時は最大化する。