

目次

著者について	i
まえがき	xi
第 1 章 特殊相対論のおさらい	1
基準系	5
時計の同期	6
慣性系	7
ガリレイ変換	7
事象	8
世界間隔	9
特殊相対論の仮定	10
3 つの基礎的な物理的現象とその性質	15
光円錐と時空図	19
4 元ベクトル	22
相対論的質量とエネルギー	24
章末問題	24
第 2 章 ベクトル, 1 形式および計量	27
新しい表記法	30
4 元ベクトル	31
アインシュタインの和の規約	33
接ベクトル, 1 形式, 座標基底	34
座標変換	36
計量	38

計量符号	42
平坦な空間の計量	43
テンソルとしての計量	43
添字の上げ下げ	44
添字体操	48
ドット積	49
計量に引数を受け渡す	50
ヌルベクトル	52
計量行列式	52
章末問題	53
第 3 章 テンソルについてより詳しく学ぶ	55
多様体	55
パラメータ化された曲線	57
接ベクトルおよび 1 形式を再検討する	59
関数としてのテンソル	63
テンソル演算	64
レビ-チビタテンソル	68
章末問題	69
第 4 章 テンソル解析	71
テンソルであるかどうかの確認法	71
テンソル方程式の重要性	72
共変微分	73
ねじれテンソル	84
計量とクリストッフェル記号	84
外微分	92
リー微分	94
リーマンテンソル	100

リッチテンソルとリッチスカラー	103
章末問題	106
第 5 章 カルタン構造方程式	109
ホロノミック (座標) 基底	109
非ホロノミック基底	111
交換係数	113
交換係数と基底 1 形式	114
基底間の変換	117
表記法上の注意	120
カルタン第 1 構造方程式とリッチ回転係数	120
章末問題	137
第 6 章 アインシュタイン方程式	141
ニュートン理論における質量の等価性	142
試験質点	145
アインシュタインのリフト実験	146
弱い等価原理	149
強い等価原理	150
一般共変性原理	150
測地線偏差	150
アインシュタイン方程式	157
宇宙定数のあるアインシュタイン方程式	159
2 + 1 次元のアインシュタイン方程式を解く例	160
エネルギー条件	174
章末問題	174
第 7 章 エネルギー運動量テンソル	177
エネルギー密度	178
運動量密度とエネルギー流束	178

ストレス (応力または圧力)	179
保存方程式	180
ダスト流体	181
完全流体	183
数密度上の相対論的効果	186
より複雑な流体	188
章末問題	189
第 8 章 キリングベクトル	191
導入	191
キリングベクトルの微分	202
キリングベクトルによって保存カレントを構成する	203
章末問題	203
第 9 章 ヌルテトラッドとペトロフ分類	205
ヌルベクトル	208
ヌルテトラッド	210
技法を拡張する	217
物理的解釈とペトロフ分類	220
章末問題	229
第 10 章 シュワルツシルト解	231
真空中のアインシュタイン方程式	232
静的球対称時空	232
曲率 1 形式	235
曲率テンソルについて解く	238
真空中のアインシュタイン方程式	240
積分定数の意味	243
シュワルツシルト計量	244
時間座標	244

シュワルツシルト半径	245
シュワルツシルト時空の測地線	246
シュワルツシルト時空での質点の軌道	248
光線の湾曲	255
時間の遅れ	260
章末問題	262
第 11 章 ブラックホール	265
重力赤方偏移	266
座標特異面	267
放射ヌル測地線	269
動径方向内向きに落下する質点の経路	271
エディントン-フィンケルシュタイン座標	273
クルスカル座標	276
カーブラックホール	278
慣性系の引きずり効果	285
特異領域	287
カー計量に対する軌道方程式のまとめ	288
さらに学びたい人へ	289
章末問題	290
第 12 章 宇宙論	293
宇宙原理	294
空間の一様性と等方性を持つ計量	294
曲率が正・負・0 の空間	299
便利な定義	302
ロバートソン-ウォーカー計量とフリードマン方程式	306
異なる宇宙モデル	311
章末問題	317

第 13 章 重力波	319
線形化された計量	320
進行波解	324
標準形と平面波	328
重力波が通過する際の質点の挙動	332
ワイルスカラー	336
ペトロフ型と光スカラーの検討	337
pp 重力波	340
平面重力波	345
アイヒェルブルク-ゼクスル解	347
衝突する重力波	347
衝突の効果	355
より一般的な衝突	357
0 でない宇宙定数	363
さらに学びたい人へ	367
章末問題	368
巻末問題	371
章末問題と巻末問題の解答	377
参考文献	379
書籍	379
論文とウェブサイト	381
訳者あとがき	383
索引	385

によって定義される。これは十分混乱するが、異なる物理学者が異なる符号規約を使うから事態はより悪くなる。あるものは $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ と書き、この場合、時間的と空間的の符号は反転する。一度、このことがさほど重要な問題でないことが分かってしまえば、特定の問題を解くために著者が使っている方を念頭に入れて読み進めればよい。

世界間隔と固有時は不変量であるから重要である。この意味は次のようなものである。お互いに運動している観測者たちが（無限小離れた 2 つの事象に対して）異なる時間間隔や空間間隔を観測しても、彼らは世界間隔と固有時については同じ値を得るのだ。

特殊相対論の仮定

簡単に言うと、特殊相対論は 3 つの単純な仮定を基礎としている。

仮定 1： 相対性原理

すべての慣性系で物理法則は等しい。

仮定 2： 光の速さは不変である。

すべての慣性系にいる観測者は同じ光の速さを測定する。

仮定 3： 一様運動は不変である。

ある慣性系で静止または一定速度で運動する質点はすべての慣性系で静止または一定速度で運動する。

これらの仮定を使って、光の速さが不変であることに注意しながら、ガリレイ変換に代わる慣性座標変換を探そう。もう一度言うと、我々は 2 つの系 F および F' を標準設定下にあるものとする（図 1.2）。最初の手順は仮定 3 を考慮することである。一様運動は直線で表され、この仮定が教えてくれるのはある系での直線はその系に対して一様に運動する系でも直線に写像されるということである。これは座標変換が線形であることの別の表現であ

る．線形変換は行列を使って表すことができる．系 F の座標を縦ベクトル

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

で表すとすると， F' の座標は F と，ある 4×4 行列 L を使って

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

の形の関係式によって表すことができる．与えられた 2 つの系が標準設定下にあるから， y 軸および z 軸は一致する．この意味は，

$$y' = y \text{ および } z' = z$$

ということである．変換の形を得るために，仮説 2 で述べられた光の速さの不変性に頼る．時刻 $t = 0$ に光の閃光が原点から発射されたものと想像しよう．光は原点から球面波として外側に広がっていく．この球面波の表面の座標の満たす式は，

$$c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1.15)$$

である．両辺から空間成分を引くと，この式は

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

になる．

光の速さの不変性は F 系に対して速度 v で運動する F' 系の観測者に対しても，光の閃光が

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$$

を満たすことを意味する．これらは等しいので，

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

が成り立つ．ここで， $y' = y$ かつ $x' = x$ より，

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2 \quad (1.16)$$

と書くことができる．さて，ここで変換が線形であるという事実を使う． y と z は変わらないから，この変換の線形性は，式の形が

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bct \\ ct' &= Cx + Dct \end{aligned} \quad (1.17)$$

でなければならないことを意味する．これは，次の行列によって表される [(1.14) 参照]：

$$L = \begin{pmatrix} D & C & 0 & 0 \\ B & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

式 (1.17) を使うと，式 (1.16) の右辺を次のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned} x'^2 &= (Ax + Bct)^2 = A^2 x^2 + 2ABctx + B^2 c^2 t^2 \\ c^2 t'^2 &= (Cx + Dct)^2 = C^2 x^2 + 2CDctx + D^2 c^2 t^2 \\ \Rightarrow c^2 t'^2 - x'^2 &= C^2 x^2 + 2CDctx + D^2 c^2 t^2 - A^2 x^2 - 2ABctx - B^2 c^2 t^2 \\ &= c^2 (D^2 - B^2) t^2 - (A^2 - C^2) x^2 + 2(CD - AB)ctx \end{aligned}$$

これは，式 (1.16) の左辺と一致しなければならない．比較してみると，次の結果が得られる．

$$\begin{aligned} CD - AB &= 0 \\ \Rightarrow CD &= AB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^2 - B^2 &= 1 \\ A^2 - C^2 &= 1 \end{aligned}$$

解を得るために， $\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = 1$ を思いだそう．これを使うと，

$$A = D = \cosh \phi \quad (1.18)$$

という置き換えができる*4. 実はある意味この変換は回転のように見なせる. 回転を導く変換は

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \phi + y \sin \phi \\y' &= -x \sin \phi + y \cos \phi\end{aligned}$$

である*5. 式 (1.17) は似たような形になり,

$$B = C = -\sinh \phi \quad (1.19)$$

と置けば, $D^2 - B^2 = A^2 - C^2 = \cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = 1$ を満たす*6. A, B, C, D が決まったことにより, 変換行列は

$$L = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

となる. さて, ここでパラメータ ϕ について解く必要がある. これは速度パラメータ (**rapidity**) と呼ばれる. 解を求めるために, x' 系の原点, すなわち $x' = 0$ は, $t = 0$ のとき $x = 0$ にあり, 速度 v で運動するから, x 系から見て $x = vt$ の位置にあることを使う. この条件を式 (1.17), (1.18), (1.19)

*4 訳注: $A = D > 0$ の証明. まず, 今考えている変換が実変換だから, A, B, C, D のすべてが実数であることに注意しよう. また, x' 軸の向きと x 軸の向き, および ct' 軸の向きと ct 軸の向きが等しいことより, $A > 0$ かつ $D > 0$ であることにも注意しよう. すると $A \neq 0$ かつ $CD = AB$ より, $B = \frac{CD}{A}$ である. すると $A^2 - C^2 = 1$ と $D^2 - B^2 = 1$ より, $A^2 - D^2 = C^2 - B^2 = C^2 - \left(\frac{CD}{A}\right)^2 = \frac{C^2}{A^2}(A^2 - D^2)$ が得られるので, $(A^2 - D^2) \left(\frac{A^2 - C^2}{A^2}\right) = 0$ であるが, $A^2 - C^2 = 1$ より, $A^2 - D^2 = 0$, つまり $A^2 = D^2$ である. いま, $A > 0$ かつ $D > 0$ だから, 結局 $A = D > 0$ となる.

*5 訳注: 質点の位置を物理的に回転させた場合と, その質点を観測する座標を回転させたのでは, 当然 ϕ の符号が逆になる. ここで考えるのは当然後者である.

*6 訳注: 負号をつける必要がないのではないかと思われる方もいるだろうが, こうとる方が自然なことが続きの計算をすれば分かる.

と一緒に使うと,

$$\begin{aligned}x' = 0 &= x \cosh \phi - ct \sinh \phi = vt \cosh \phi - ct \sinh \phi \\ &= t(v \cosh \phi - c \sinh \phi)\end{aligned}$$

が得られるので, $v \cosh \phi - c \sinh \phi = 0$ である. これは,

$$\begin{aligned}v \cosh \phi &= c \sinh \phi \\ \Rightarrow \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} &= \tanh \phi = \frac{v}{c}\end{aligned}\tag{1.21}$$

を意味する*7. この結果はローレンツ変換を初等的な教科書で表されている形に置き換えるのに使うことができる. まず,

$$\begin{aligned}x' &= \cosh \phi x - \sinh \phi ct \\ ct' &= -\sinh \phi x + \cosh \phi ct\end{aligned}$$

より, t' に関する変換公式は,

$$\begin{aligned}ct' &= -\sinh \phi x + \cosh \phi ct = \cosh \phi \left(-\frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} x + ct \right) \\ &= \cosh \phi \left(-\tanh \phi x + ct \right) \\ &= \cosh \phi \left(ct - \frac{v}{c} x \right) \\ &= c \cosh \phi \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \\ \Rightarrow t' &= \cosh \phi \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)\end{aligned}$$

となる. また,

$$\begin{aligned}x' &= \cosh \phi x - \sinh \phi ct \\ &= \cosh \phi \left(x - \tanh \phi ct \right) \\ &= \cosh \phi \left(x - vt \right)\end{aligned}$$

*7 訳注: 式 (1.19) で負号をつけたから $v > 0$ に $\phi > 0$ が対応するようになったのである.

も得られる。さてここで、双曲線余弦関数 $\cosh \phi$ のちょっとしたトリックを行おう。

$$\begin{aligned} \cosh \phi &= \frac{\cosh \phi}{1} = \frac{\cosh \phi}{\sqrt{1}} = \frac{\cosh \phi}{\sqrt{\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi}} \\ &= \frac{1}{(1/\cosh \phi) \sqrt{\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1/\cosh^2 \phi)(\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \phi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

これは初等的な教科書で γ の定義に使われているものに他ならない。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \cosh \phi \quad (1.22)$$

したがって、ローレンツ変換は次のような有名な形で書くことができる。

$$t' = \gamma(t - vx/c^2), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z \quad (1.23)$$

$\beta = v/c$ という記法も一般によく使われるので覚えておこう。

3つの基礎的な物理的現象とその性質

ローレンツ変換から直ちに出てくる3つの物理的結果が存在する。これらは、時間の遅れ、長さの短縮、および“新しい”速度の合成則である。

時間の遅れ

2つの系が標準設定下であり、したがって系 F' は系 F に対して一様速度 v で運動するものと想像しよう。 F' 系の観測者が測定する時間間隔 $\Delta t'$ は F から見ると、

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Delta t' = \gamma \Delta t'$$