目次

によって定義される．これは十分混乱するが，異なる物理学者が異なる符号規約を使うから事態はより悪くなる．あるものは $\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ と書き，この場合，時間的と空間的の符号は反転する．一度，このことがさほど重要な問題でないことが分かってしまえば，特定の問題を解くために著者が使っている方を念頭に入れて読み進めればよい．

世界間隔と固有時は**不変**量であるから重要である．この意味は次のようなものである．お互いに運動している観測者たちが（無限小離れた 2 つの事象に対して）異なる時間間隔や空間間隔を観測しても，彼らは世界間隔と固有時については同じ値を得るのだ．

特殊相対論の仮定

簡単に言うと，特殊相対論は 3 つの単純な仮定を基礎としている．

仮定 1：　相対性原理

すべての慣性系で物理法則は等しい．

仮定 2：　光の速さは不変である．

すべての慣性系にいる観測者は同じ光の速さを測定する．

仮定 3：　一様運動は不変である．

ある慣性系で静止または一定速度で運動する質点はすべての慣性系で静止または一定速度で運動する．

これらの仮定を使って，光の速さが不変であることに注意しながら，ガリレイ変換に代わる慣性座標変換を探そう．もう一度言うと，我々は 2 つの系 F および F' を標準設定下にあるものと考える（図 1.2）．最初の手順は仮定 3 を考慮することである．一様運動は直線で表され，この仮定が教えてくれるのはある系での直線はその系に対して一様に運動する系でも直線に写像されるということである．これは座標変換が線形であることの別の表現であ

る．線形変換は行列を使って表すことができる．系 F の座標を縦ベクトル

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

で表すとすると，F' の座標は F と，ある 4×4 行列 L を使って

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

の形の関係式によって表すことができる．与えられた 2 つの系が標準設定下にあるから，y 軸および z 軸は一致する．この意味は，

$$y' = y \text{ および } z' = z$$

ということである．変換の形を得るために，仮説 2 で述べられた光の速さの不変性に頼る．時刻 $t = 0$ に光の閃光が原点から発射されたものと想像しよう．光は原点から球面波として外側に広がっていく．この球面波の表面の座標の満たす式は，

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1.15}$$

である．両辺から空間成分を引くと，この式は

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

になる．

光の速さの不変性は F 系に対して速度 v で運動する F' 系の観測者に対しても，光の閃光が

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$$

を満たすことを意味する．これらは等しいので，

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

が成り立つ．ここで，$y' = y$ かつ $x' = x$ より，

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 \tag{1.16}$$

と書くことができる．さて，ここで変換が線形であるという事実を使う．y と z は変わらないから，この変換の線形性は，式の形が

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bct \\ ct' &= Cx + Dct \end{aligned} \tag{1.17}$$

でなければならないことを意味する．これは，次の行列によって表される [(1.14) 参照]：

$$L = \begin{pmatrix} D & C & 0 & 0 \\ B & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

式 (1.17) を使うと，式 (1.16) の右辺を次のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned} x'^2 =& (Ax + Bct)^2 = A^2x^2 + 2ABctx + B^2c^2t^2 \\ c^2t'^2 =& (Cx + Dct)^2 = C^2x^2 + 2CDctx + D^2c^2t^2 \\ \Rightarrow c^2t'^2 - x'^2 =& C^2x^2 + 2CDctx + D^2c^2t^2 - A^2x^2 - 2ABctx - B^2c^2t^2 \\ =& c^2(D^2 - B^2)t^2 - (A^2 - C^2)x^2 + 2(CD - AB)ctx \end{aligned}$$

これは，式 (1.16) の左辺と一致しなければならない．比較をしてみると，次の結果が得られる．

$$\begin{gathered} CD - AB = 0 \\ \Rightarrow CD = AB \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} D^2 - B^2 = 1 \\ A^2 - C^2 = 1 \end{gathered}$$

解を得るために，$\cosh^2\phi - \sinh^2\phi = 1$ を思いだそう．これを使うと，

$$A = D = \cosh\phi \tag{1.18}$$

という置き換えができる[*4]．実はある意味この変換は回転のように見なせる．回転を導く変換は

$$\begin{aligned} x' =& x\cos\phi + y\sin\phi \\ y' =& -x\sin\phi + y\cos\phi \end{aligned}$$

である[*5]．式 (1.17) は似たような形になり，

$$B = C = -\sinh\phi \tag{1.19}$$

と置けば，$D^2 - B^2 = A^2 - C^2 = \cosh^2\phi - \sinh^2\phi = 1$ を満たす[*6]．A, B, C, D が決まったことにより，変換行列は

$$L = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi & 0 & 0 \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

となる．さて，ここでパラメータ ϕ について解く必要がある．これは**速度パラメータ (rapidity)** と呼ばれる．解を求めるために，x' 系の原点，すなわち $x' = 0$ は，$t = 0$ のとき $x = 0$ にあり，速度 v で運動するから，x 系から見て $x = vt$ の位置にあることを使う．この条件を式 (1.17)，(1.18)，(1.19)

---

*4 訳注：$A = D > 0$ の証明．まず，今考えている変換が実変換だから，A, B, C, D のすべてが実数であることに注意しよう．また，x' 軸の向きと x 軸の向き，および ct' 軸の向きと ct 軸の向きが等しいことより，$A > 0$ かつ $D > 0$ であることにも注意しよう．すると $A \neq 0$ かつ $CD = AB$ より，$B = \dfrac{CD}{A}$ である．すると $A^2 - C^2 = 1$ と $D^2 - B^2 = 1$ より，$A^2 - D^2 = C^2 - B^2 = C^2 - \left(\dfrac{CD}{B}\right)^2 = \dfrac{C^2}{A^2}(A^2 - D^2)$ が得られるので，$(A^2 - D^2)\left(\dfrac{A^2 - C^2}{A^2}\right) = 0$ であるが，$A^2 - C^2 = 1$ より，$A^2 - D^2 = 0$，つまり $A^2 = D^2$ である．いま，$A > 0$ かつ $D > 0$ だから，結局 $A = D > 0$ となる．

*5 訳注：質点の位置を物理的に回転させた場合と，その質点を観測する座標を回転させたのでは，当然 ϕ の符号が逆になる．ここで考えるのは当然後者である．

*6 訳注：負号をつける必要がないのではないかと思われる方もいるだろうが，こうとる方が自然なことが続きの計算をすれば分かる．

と一緒に使うと，

$$
\begin{aligned}
x' = 0 = x\cosh\phi - ct\sinh\phi =& vt\cosh\phi - ct\sinh\phi \\
=& t(v\cosh\phi - c\sinh\phi)
\end{aligned}
$$

が得られるので，$v\cosh\phi - c\sinh\phi = 0$ である．これは，

$$
\begin{aligned}
& v\cosh\phi = c\sinh\phi \\
\Rightarrow & \frac{\sinh\phi}{\cosh\phi} = \tanh\phi = \frac{v}{c}
\end{aligned} \tag{1.21}
$$

を意味する[*7]．この結果はローレンツ変換を初等的な教科書で表されている形に置き換えるのに使うことができる．まず，

$$
\begin{aligned}
x' &= \cosh\phi x - \sinh\phi ct \\
ct' &= -\sinh\phi x + \cosh\phi ct
\end{aligned}
$$

より，t' に関する変換公式は，

$$
\begin{aligned}
ct' =& -\sinh\phi x + \cosh\phi ct = \cosh\phi\left(-\frac{\sinh\phi}{\cosh\phi}x + ct\right) \\
=& \cosh\phi(-\tanh\phi x + ct) \\
=& \cosh\phi\left(ct - \frac{v}{c}x\right) \\
=& c\cosh\phi\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow t' = \cosh\phi\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)
$$

となる．また，

$$
\begin{aligned}
x' &= \cosh\phi x - \sinh\phi ct \\
&= \cosh\phi(x - \tanh\phi ct) \\
&= \cosh\phi(x - vt)
\end{aligned}
$$

[*7] 訳注：式 (1.19) で負号をつけたから $v > 0$ に $\phi > 0$ が対応するようになったのである．

も得られる．さてここで，双曲線余弦関数 $\cosh\phi$ のちょっとしたトリックを行おう．

$$\begin{aligned}\cosh\phi = \frac{\cosh\phi}{1} &= \frac{\cosh\phi}{\sqrt{1}} = \frac{\cosh\phi}{\sqrt{\cosh^2\phi - \sinh^2\phi}} \\ &= \frac{1}{(1/\cosh\phi)}\frac{1}{\sqrt{\cosh^2\phi - \sinh^2\phi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1/\cosh^2\phi)(\cosh^2\phi - \sinh^2\phi)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\end{aligned}$$

これは初等的な教科書で γ の定義に使われているものに他ならない．

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \cosh\phi \tag{1.22}$$

したがって，ローレンツ変換は次のような有名な形で書くことができる．

$$t' = \gamma(t - vx/c^2), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z \tag{1.23}$$

$\beta = v/c$ という記法も一般によく使われるので覚えておこう．

3 つの基礎的な物理的現象とその性質

ローレンツ変換から直ちに出てくる 3 つの物理的結果が存在する．これらは，時間の遅れ，長さの短縮，および "新しい" 速度の合成則である．

時間の遅れ

2 つの系が標準設定下にあり，したがって系 F' は系 F に対して一様速度 v で運動するものと想像しよう．F' 系の観測者が測定する時間間隔 $\Delta t'$ は F から見ると，

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta t' = \gamma\Delta t'$$