目次

Chapter 6 スカラー場

相対性理論を量子力学に融合させる最初の試みは，単一粒子に対して適用されると想像されるシュレディンガー方程式の相対論的一般化を含むものとして読者は考えるかもしれない．実際，シュレディンガー自身がのちに続く彼の有名な非相対論的波動方程式の前に相対論的方程式を導いていた．我々が 2 章で最初に学んだクライン-ゴルドン方程式である．彼は次の 3 つの主な理由のために，量子力学のための正しいものとしてクライン-ゴルドン方程式を捨てることになった．

- それは負エネルギー解を持っているように見えた．
- それは負の確率分布を導くように見えた．
- それは間違った水素原子のスペクトルを与えた．

これらの要因を調べて，彼は今日クライン-ゴルドン方程式として知られるものを捨てシュレディンガー方程式として知られるものの方を選んだ．しかし，のちに見るように，クライン-ゴルドン方程式の主な問題は解釈の問題である．

我々は 1 章で学んだことを考えることによって，相対論的波動方程式への道を開く．相対論は時間と空間を同様の形式で扱う．波動方程式において，これは時間と空間座標による偏微分が同じ階数であることを意味する．非相

対論的シュレディンガー方程式において，時間に関する 1 階微分が存在するが，空間座標に関する偏微分は 2 階である．このことがはっきりと分かるように，シュレディンガー方程式を 1 つの空間次元の場合について書き下そう．

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+V\Psi \tag{6.1}$$

この方程式は時間に関する 1 階微分 $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ を左辺に持つにもかかわらず，空間座標に関する 2 階微分を右辺に持つから相対論的ではありえない．量子論に特殊相対論を組み込むために我々は対称性を期待する．この状況は時間と空間座標ともに 2 階微分をとることでクライン-ゴルドン方程式において修正される．これとは対照的にディラックはスピン 1/2 粒子に適用される彼の有名な方程式を導いたときに，空間と時間座標をともに 1 階微分を適用したことを強調した．のちに，何故ディラックが我々が捜している時間と空間の対称性を得るために空間微分を 1 階微分に “降格” することを決定したのかを，時間に関する 2 階微分がクライン-ゴルドン方程式においてどのように問題を引き起こすのかを見るときに理解するだろう．この章ではスカラー場に適用されるクライン-ゴルドン方程式を議論する．

クライン-ゴルドン方程式に到達する

ここでは，相対論的波動方程式を 2 章で簡単に学んだ方程式，クライン-ゴルドン方程式に戻って調査を開始する．2 章において，それがどのようにして与えられたラグランジアンから導くことができるのかを見てきた．しかし，この方程式の最終的な起源は不可解だったかもしれない．ここですぐに見るのはクライン-ゴルドン方程式が 2 つの基本原理の適用に従うということだ．それは 1 つが特殊相対論からとられ，もう 1 つが量子力学からとられる．これらは，

- アインシュタインによって導かれたエネルギー，質量，運動量の間の

相対論的関係

- 量子力学における，測定可能な量（“可観測量”）の数学的演算子への昇格

である．

さて，早速シュレディンガー，クライン，ゴルドン（私が無視していることを謝罪しなければならない，この方程式を導いた既に亡くなった他の全ての人も）がどのようにしてその方程式を導いたのかを見ていこう．クライン-ゴルドン方程式は非常に簡単に 2 ステップで導ける．我々は特殊相対論で使われるエネルギー，運動量，質量の間の基礎的な関係式を書き出すことから始める．

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{6.2}$$

さて，するとすぐに量子力学の番になる．量子力学において可観測量は，読者が間違いなく良く知っている特定の処方箋を使って数学的演算子に変わる．我々はどのようにしてこれが行われるのかを非相対論的シュレディンガー方程式 (6.1) を確認することで見ることができる．読者は時間に依存しないシュレディンガー方程式が

$$E\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi \tag{6.3}$$

によって与えられることを思い出すだろう．したがって，読者はシュレディンガー方程式が非相対論的エネルギーの定義の記述と考えることができると思われるかもしれない．このため我々は時間に関する偏微分をとる演算子にエネルギーを昇格し，エネルギーに対して次のような置き換えを行う．

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{6.4}$$

通常の量子力学において運動量 p は空間微分によって与えられることも思い出そう．すなわち，

$$p \to -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \tag{6.5}$$

である．3 次元に一般化すると，この関係は,

$$\vec{p} \to -i\hbar \nabla \tag{6.6}$$

となる．クライン-ゴルドン方程式を導くために我々がするべき全てのことは，エネルギー，運動量，質量に関するアインシュタインの関係式 (6.2) に置き換え (6.4) と (6.6) を代入して，それを波動関数 φ に作用させることである．式 (6.4) を使うと，

$$E^2 \to -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

となることが分かる．さて，式 (6.6) を使うことにより，

$$p^2 \to -\hbar^2 \nabla^2$$

を得る．したがって，演算子に対するエネルギー，運動量，質量に関するアインシュタインの関係 (6.2) は

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4$$

のように書くことができる．これは，これに対して**何かをしないと**使い道がないか意味をなさない．よって，我々はこの演算子に対して空間と時間の関数 $\varphi = \varphi(\vec{x}, t)$ を作用させる．これを行い，少し移項するとクライン-ゴルドン方程式が得られる．

$$\hbar^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \hbar^2 c^2 \nabla^2 \varphi + m^2 c^4 \varphi = 0 \tag{6.7}$$

1 章で議論したように，素粒子物理学では決まって $\hbar = c = 1$（自然単位）という単位系で議論する．したがって，この方程式は,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi + m^2 \varphi = 0 \tag{6.8}$$

となる．この方程式の見かけ上異なる記号法を使ってさらに少し単純化できる．実際，2 つの異なる方法で書くことができる．まず最初は，ミンコフスキー空間のダランベール演算子

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

を思い出すことである．これは式 (6.8) を次のような簡単な形で表すことを許す：

$$(\Box + m^2)\varphi = 0$$

これは以下の理由でクライン-ゴルドン方程式を書くための優れた方法である．我々は $\Box$ が相対論的不変量であることを知っている．すなわち，$\Box$ はスカラーとして変換するから全ての慣性系で同じである．質量 m はもちろんスカラーであるから，演算子

$$\Box + m^2$$

もまたスカラーである．これが教えてくれるのは，我々がのちに場として解釈する関数 φ もまたスカラーとして変換するならば，クライン-ゴルドン方程式は共変になるということである．1 章では，座標 x^μ がローレンツ変換の下で

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{6.9}$$

と変換することを学んだ．$\varphi(x)$ が**スカラー**場であるとき，それは

$$\varphi'(x') = \varphi(x) \tag{6.10}$$

と変換する．

ここでクライン-ゴルドン方程式の最初の特徴付けに導かれた．