理工系の統計学入門
【補足】

二項分布の期待値と分数……………………………2
ポアソン分布の導出……………………………………4
正規分布の積率母関数………………………………6

二項分布の期待値と分数　p.38

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n}xP(X=x)=\sum_{x=0}^{n}x\cdot{}_nC_x\,p^x(1-p)^{n-x}$$

$$=\sum_{x=1}^{n}x\cdot{}_nC_x\,p^x(1-p)^{n-x}=\sum_{x=1}^{n}x\frac{n!}{(n-x)!\,x!}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$=\sum_{x=1}^{n}\frac{n!}{(n-x)!(x-1)!}p^x(1-p)^{n-x}=\sum_{x=1}^{n}\frac{n(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!}p\cdot p^{x-1}(1-p)^{n-x}$$

$$=np\sum_{x=1}^{n}\underbrace{\frac{(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!}}\,p^{x-1}(1-p)^{n-x}$$

この部分は ${}_{n-1}C_{x-1}$ になるので

「x が 1 から n」を「$x-1$ が 0 から $n-1$」として

$$=np\underbrace{\sum_{x-1=0}^{n-1}{}_{n-1}C_{x-1}\,p^{x-1}(1-p)^{(n-1)-(x-1)}}$$

この部分は $x-1$ が 0 から $n-1$ までの

二項分布の確率の合計なので 1

$$=np$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=E(X^2)-n^2p^2$$

$E(X^2)$ は

$$E(X^2)=\sum_{x=0}^{n}x^2P(X=x)$$

$$=\sum_{x=1}^{n}x^2\cdot{}_nC_x\,p^x(1-p)^{n-x}$$

$E(X)$ を外に出すために x の項を作る.

$$=\sum_{x=1}^{n}(x^2+x-x){}_nC_x\,p^x(1-p)^{n-x}$$

$$=\sum_{x=1}^{n}\left\{(x^2-x)+x\right\}{}_nC_x\,p^x(1-p)^{n-x}$$

$$=\sum_{x=1}^{n}\left\{x(x-1)\right\}{}_nC_x\,p^x(1-p)^{n-x}+\underbrace{\sum_{x=1}^{n}x\cdot{}_nC_x\,p^x(1-p)^{n-x}}_{E(X)}$$

$$=\sum_{x=2}^{n}\{x(x-1)\}\frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x}+E(X)$$

$$=\sum_{x=2}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{(x-2)!}p^x(1-p)^{n-x}+E(X)$$

x について 2 から n まで合計することは，$x-2$ について 0 から $n-2$ まで合計することとおなじなので

$$=n(n-1)\sum_{x-2=0}^{n-2}\frac{(n-2)\cdots(n-x+1)}{(x-2)!}p^x(1-p)^{n-x}+E(X)$$

確率の部分を $p^{x-2}(1-p)^{n-2-(x-2)}$ とするために p^2 を外に出して

$$=n(n-1)p^2\sum_{x-2=0}^{n-2}\frac{(n-2)\cdots(n-x+1)}{(x-2)!}p^{x-2}(1-p)^{n-2-(x-2)}+E(X)$$

分数式の分子を $(n-2)!$ にするために分子分母に $(n-x)!$ をかける．

$$=n(n-1)p^2\underbrace{\sum_{x-2=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}}_{{}_{n-2}C_{x-2}}p^{x-2}(1-p)^{n-2-(x-2)}+E(X)$$

$\displaystyle\sum_{x-2=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}p^{x-2}(1-p)^{n-2-(x-2)}$ は $x-2$ が 0 から $n-2$ までの二項分布の確率の合計なので 1.

$$\therefore\quad E(X^2)=n(n-1)p^2+E(X)$$
$$=n^2p^2-np^2+np$$

$$\therefore\quad V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2$$
$$=np-np^2$$
$$=np(1-p)$$

ポアソン分布の導出　　p.41

$X \sim B(n, p)$ において

$$P(X=x)={}_nC_x\, p^x(1-p)^{n-x}$$
$$=\frac{n!}{(n-x)!x!}\cdot p^x(1-p)^{n-x}$$
$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!}p^x(1-p)^{n-x}$$

$np=\lambda$ とすると $p=\dfrac{\lambda}{n}$ なので

$$p^x=\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x=\frac{\lambda^x}{n^x}$$

として二項分布の確率は

$$P(X=x)=\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!}\cdot\frac{\lambda^x}{n^x}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$
$$=\frac{\lambda^x}{x!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$
$$=\frac{\lambda^x}{x!}\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-x+1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$
$$=\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$
$$=\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$n\to\infty$ のとき $1-\dfrac{1}{n}$, $\cdots$ $1-\dfrac{x-1}{n}$, $\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{-x}$ はそれぞれ 1 になる.

$\therefore$　n が非常に大きいとき

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

$\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^n$ について,　$\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ の形にするために $-\dfrac{\lambda}{n}=h$ とおく.

$$n=-\frac{\lambda}{h}$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=(1+h)^{-\frac{\lambda}{h}}$$
$$=\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-\lambda}$$

$n\to\infty$のとき $h\to-0$ なので

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=\lim_{h\to-0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-\lambda}$$
$$=e^{-\lambda}$$

$\therefore$ n が非常に大きく p が小さいとき二項分布の確率は

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}\cdot e^{-\lambda}$$

のポアソン分布で近似される.

※ポアソン分布の導出については岡本和夫監修「新版 確率統計」(実教出版)を参照しました.

正規分布の積率母関数　　p.67

$$M_X(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{\theta x\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\theta x-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{-(x-\mu)^2+2\sigma^2\theta x}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{x^2-2\mu x+\mu^2-2\sigma^2\theta x}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{x^2-2(\mu+\sigma^2\theta)x+\mu^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{\{x-(\mu+\sigma^2\theta)\}^2-(\mu+\sigma^2\theta)^2+\mu^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{\{x-(\mu+\sigma^2\theta)\}^2}{2\sigma^2}+\left(\mu\theta+\frac{\sigma^2\theta^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(\mu\theta+\frac{\sigma^2\theta^2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{\{x-(\mu+\sigma^2\theta)\}^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}x$$

μ, σ, θ は x についての積分では定数なので $\mu+\sigma^2\theta$ を A とおく.

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(\mu\theta+\frac{\sigma^2\theta^2}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-A}{\sigma}\right)^2\right\}\mathrm{d}x$$

$t=\dfrac{x-A}{\sigma}$ とおいて置換積分

$x=\sigma t+A$ より $\mathrm{d}x=\sigma\mathrm{d}t$

範囲は $-\infty<x<\infty$ に対して $-\infty<t<\infty$

∴　積分の部分は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)\sigma\mathrm{d}t$$

$$=\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{2\pi}\sigma$$

$$\therefore \quad M_X(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\mu\theta + \frac{\sigma^2\theta^2}{2}\right) \times \sqrt{2\pi}\sigma$$

$$= \exp\left(\mu\theta + \frac{\sigma^2\theta^2}{2}\right)$$