『学び楽しむ微積分』の訂正や補足

(作成者：齋藤 洋介)

(作成日：2022 年 1 月 11 日 (火))

ここでは,『学び楽しむ微積分』(以下, これを“本書”と呼ぶ) に残っている間違った記述の訂正や改善できる箇所についてコメントしていく.

第 2 章「多項式の微積分」

- 本書 13 ページの終盤から「0 による割り算はできない」話をしているが, これはもう少し仮定を明確にした方がよかった. この部分では,「0 の性質を認めたまま, 0 以外の数と同様に $\frac{0}{0}=1$ であると仮定すると, 矛盾が生じる」ことを述べている, と理解してほしい.

- 20 ページの後半で,「微分可能な関数は連続である」ことを示そうとして

$$“\,|f(x)-f(a)|=\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right||x-a| \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)\cdot 0=0\,”$$

と書いたが, $\xrightarrow[x\to a]{}$ の後の $f'(a)$ に絶対値をつけ忘れているのがわかる. この部分は

$$f(x)=f(x)-f(a)+f(a)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)+f(a) \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)\cdot 0+f(a)=f(a)$$

などと書く方が素直である.

- 23 ページにて, 命題 2.8 として 2 項定理とその証明が述べられている. ここで筆者は次のことを示している：$n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ および $x\in\mathbb{R}$ に対し

$$(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r x^r\cdots(*).$$

本書では, これを n に関する帰納法によって示した. よくやるように, $n=0, 1$ の場合は $(*)$ を直接確かめておき, 次に $(*)$ が“ある n”について成り立つと仮定し $\cdots$, という具合である. 23 ページのこの箇所で, 筆者は

“次にある $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で $(*)$ が成り立つと仮定し”

と述べているが, この n に対する条件を「$n\in\mathbb{Z}_{>0}$」に訂正する. $n=0$ の場合の $(1+x)^0=1={}_0\mathrm{C}_0x^0$ からは, $n=1$ の場合の $(1+x)^1=1+x={}_1\mathrm{C}_0x^0+{}_1\mathrm{C}_1x^1$ を示すこと

ができない．よって，帰納法の例のステップでは「ある自然数 n について $(*)$ が成り立つと仮定する」と述べねばならないのである．

- 28 ページの命題 2.13 では，いわゆる「微分の線型性」と「ライプニッツ則 (積の微分)」が述べられている．筆者は，微分可能な関数 f, g に対し，これらの積 fg が微分可能であるかどうか示す前に，証明の中に

$$“(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \cdots ”$$

という具合にうっかり書いてしまった．これは次のようにすればよい：微分可能な関数 f, g について

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\end{aligned}$$

がわかる．よって，微分可能な関数 f, g の積 fg も微分可能で $(fg)'=f'g+fg'$ が成り立つ．こういう風に述べればよい．

- 29 ページで，命題 2.15 として「ベキ関数 x^n $(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ は微分可能である」ことが述べられている．先ほどと同様のうっかりであるが，この証明の中で

$$“(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} = \cdots ”$$

と書いている．これは次のようにした方がよい：ベキ関数 x^n について

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h} = \frac{1}{h}\left\{\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{n-k}h^k - x^n\right\} = \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^{n-k}h^{k-1} \xrightarrow[h\to 0]{} nx^{n-1}$$

がわかる．途中で 2 項定理と「多項式は連続関数である」ことを使った．よって，x^n は微分可能で $(x^n)'=nx^{n-1}$ が成り立つ．

- 29 ページの下部で

“$(x^n)'=nx^{n-1}$ $(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ を帰納法によって示すという手もある”

と述べて説明を始めている．この部分に少しコメントしておく．この場合，まず最も簡単な 1 次関数 x が微分可能で $(x)'=1$ であることを示す必要がある．その証明として

$$“(x)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \cdots ”$$

と書いたが, これも例のうっかりである. 例えば「1 次関数 x について

$$\frac{(x+h)-x}{h}=1 \xrightarrow[h\to 0]{} 1$$

なので, 1 次関数 x も微分可能で $(x)'=1$ である」, などと述べれば十分である. このまま, 帰納法のお決まりのステップの「ある $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ があって $\cdots$」に進んでもいいのかもしれないが, 筆者は次のようにしておくのがいいと思う. まず, 既に見たように, 1 次関数 x は微分可能である. 積の微分 (ライプニッツ則) から $x^2=x\cdot x$ も微分可能であり, $x^3=x\cdot x^2$ も微分可能, $x^4=x\cdot x^3$ も微分可能 $\cdots$ と続く. よって, ベキ関数 x^n $(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ は一般に微分可能である. こういう風に, 微分可能性を先に述べておくのがよい.

- 同様のことを既に述べているが, 31 ページの命題 2.18 (商の微分) の証明を

$$\text{“}\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{f(x+h)}-\frac{1}{f(x)}\right\}=\cdots\text{”}$$

と書き始めてしまっている. 深刻な間違いというのではないが, この赤色の部分を削除しておき, 最後に「よって $1/f$ は微分可能で $\left(\dfrac{1}{f}\right)'=-\dfrac{f'}{f^2}$ である」と述べるのが無難である.

- 32 ページにおいて, 補題 2.19 として「合成関数の微分」を扱った. この証明としては, よくやるように

$$\text{“}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}=\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(g(x))g'(x)\text{”}$$

で済ませたが, 実は, 点 x を 1 つとるとき, $g(x+h)=g(x)$ が成り立つような $h\neq 0$ で大きさがいくらでも小さなものが無数に存在する場合には, この論法は使えない. この話題に関しては, 次のような工夫が知られている.

適当な部分集合 $I\subset\mathbb{R}$ で定義された関数 $f:I\to\mathbb{R}$ があり, これが点 $a\in I$ で微分可能であるとする. これは極限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が存在するということであるが (その値が $f'(a)$), ここで関数 $\Delta_f(x,a)$ $(x\in I)$ を

$$\Delta_f(x,a):=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a) & (x\neq a),\\ 0 \quad (x=a)\end{cases}$$

とおく. こうすると, 関数 $\Delta_f(x,a)$ は点 a で連続で $\lim_{x\to a}\Delta_f(x,a)=0$ である. また

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\Delta_f(x,a)(x-a) \quad (x\in I)$$

も成り立つ (よって, $\Delta_f(x,a)(x-a)$ とは, 関数 f を点 a の周りで 1 次近似するときの剰余項である). こういう見方によって次のことがわかる :

- 適当な部分集合 $I\subset\mathbb{R}$ で定義された関数 $f:I\to\mathbb{R}$ があるとする. また, ある $a\in I$ と実数 A, および関数 $\Delta:I\to\mathbb{R}$ があって, これらに関して

$$f(x)=f(a)+A(x-a)+\Delta(x)(x-a), \quad \lim_{x\to a}\Delta(x)=0$$

が成り立つとする. この場合, 関数 f は点 a で微分可能で $f'(a)=A$ である.

ここから,「合成関数の微分」のうまい証明を述べる. 適当な部分集合 I, $J\subset\mathbb{R}$ で定義された関数 $g:I\to\mathbb{R}$, $f:J\to\mathbb{R}$ があり, これらは微分可能であるとする. また, 関数 g の像 $\mathrm{Im}\, g=\{g(x)\in\mathbb{R}\mid x\in I\}$ は関数 f の定義域 J に含まれるとする. このとき

$$I\ni x\mapsto g(x)\mapsto f(g(x))\in\mathbb{R}$$

なる合成関数が考えられる. $a\in I$ を 1 つとる. 関数 g は点 a で微分可能であり, 関数 f は点 $g(a)\in J$ で微分可能である. 記号 “$\Delta_f(x,a)$” を使うと, $x\in I$ に対し

$$g(x)-g(a)=g'(a)(x-a)+\Delta_g(x,a)(x-a),$$
$$f(g(x))-f(g(a))=f'(g(a))\{g(x)-g(a)\}+\Delta_f(g(x),g(a))\{g(x)-g(a)\}$$

である. これらより

$$\begin{aligned}
&f(g(x))-f(g(a))\\
&=f'(g(a))g'(a)(x-a)\\
&\quad+\{f'(g(a))\Delta_g(x,a)+\Delta_f(g(x),g(a))g'(a)+\Delta_f(g(x),g(a))\Delta_g(x,a)\}(x-a)
\end{aligned}$$

であるが, 仮定より

$$f'(g(a))\Delta_g(x,a)+\Delta_f(g(x),g(a))g'(a)+\Delta_f(g(x),g(a))\Delta_g(x,a)\xrightarrow[x\to a]{}0$$

である. よって, 関数 $f(g(x))$ は点 a で微分可能で, そこでの微分係数は $f'(g(a))g'(a)$ であることがわかる. $\square$

第 3 章「三角関数の微積分」

- 本書 49 ページの下の方で

“度数法の角と弧度法の角が比例することについて, 3.4 で補足する”

という風なことを述べているが, 実際には何のコメントもせずに話を終えてしまった. 3.4 で述べたように, 弧度法の角は積分によって定義できる. よって,「弧度法で測った角度 x の角を『これは角度が $\dfrac{x}{\pi}\times 180^\circ$ の角である』と理解するのが度数法である」, とすればよい.「弧度法が先にあり, 度数法は弧度法によって後で定義される」という立場をとるということである.

- 58 ページにおいて, 定理 3.6 として「$\sin x$, $\cos x$ は微分可能で $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$ である」ことを述べた. 筆者はこの証明を

$$“(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cdots”$$

と書き始めてしまっている. 既に見たようなうっかりなので, ここでは繰り返さないが, ご注意願いたい.

第 4 章「指数関数, 対数関数の微積分」

- 本書 87 ページで

“「$a>1$ ならば, 指数関数 a^x は単調増加する」”

という風な記述があるが, ここは「狭義単調増加する」と述べた方がよい (指数関数の逆関数として対数関数を定義する話が続くので).

- 90 ページにて, 命題 4.11 として「指数関数 e^x, 対数関数 $\log x$ は微分可能で $(e^x)'=e^x$, $(\log x)'=1/x$ が成り立つ」ことが述べられている. この部分でも

$$“(e^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\cdots”$$

という風に証明を始めてしまっている (対数関数 $\log x$ の方も同様). ご注意願いたい.

- 103 ページの中ほどで

“「これらより, $\exp(x)$ は単調増加する関数であることがわかる」”

と述べているが, 正確には「狭義単調増加する」と述べるべきである (その後で $\exp(x)$ が逆関数を持つことに触れるので).

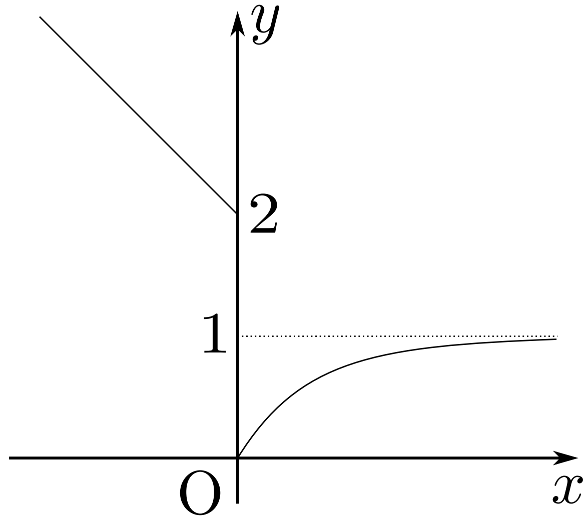
第 5 章「写像についてもう少し」

- 本書 123 ページにおいて

“関数 $f:I\to\mathbb{R}$ が単射であることと, f が I で狭義単調であることは同値である”

と述べてしまったが, これは間違いである
(「狭義単調な関数は単射である」というのは正しい).
単射であるが狭義単調でない関数がいくらでも存在する. 例えば次のものがある：

$$f(x):=\begin{cases}-x+2 & (x<0),\\ 1-e^{-x} & (x\geq 0).\end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & (x<0),\\ 1-e^{-x} & (x\geq 0).\end{cases}$$

- 124 ページの命題 5.10 において「微分可能な関数の逆関数も微分可能である」ことを証明したが, 以下のようにした方がわかりやすいと思う.

適当な $I\subset\mathbb{R}$ で定義された関数 $f:I\to\mathbb{R}$ は単射で, I で微分可能であるとする. 関数 f の逆関数を $g:\mathrm{Im}\,f\to I$ と書く. ある $c\in\mathrm{Im}\,f$ があって $f'(g(c))\neq 0$ であるとする. $h\neq 0$ の大きさを十分小さくとれば $c+h\in\mathrm{Im}\,f$ とできる. このとき

$$1=\frac{f(g(c+h))-f(g(c))}{h}=\frac{f(g(c+h))-f(g(c))}{g(c+h)-g(c)}\cdot\frac{g(c+h)-g(c)}{h}\cdots(*)$$

である. ここで $h\neq 0$ および g は単射なので $g(c+h)-g(c)\neq 0$ である. よって, 上のような変形に問題はない. 関数 f は点 $g(c)$ で微分可能なので

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(g(c+h))-f(g(c))}{g(c+h)-g(c)}=f'(g(c))$$

である. よって, 上の $(*)$ において $h\to 0$ とすることを考えると, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(c+h)-g(c)}{h}$ も存在して

$$1=f'(g(c))\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(c+h)-g(c)}{h}\Leftrightarrow\lim_{h\to 0}\frac{g(c+h)-g(c)}{h}=\frac{1}{f'(g(c))}$$

がわかる. $\square$

第 6 章「いくつかの積分の話」

- 本書 146 ページにおいて,「関数 f, g で $f(x) \leq g(x)$ なるものに対し

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

が成り立つ」, と述べたが, この中の a, b について $a \leq b$ でなくてはならない. この下にある

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

についても同様である.

第 7 章「積分についてもう少し」

- 本書 169 ページから始まる 7.5「有理関数の積分」において「有理関数を積分するには部分分数分解が必要である」と述べた．部分分数分解について少し補足しておく．2 つの異なる多項式 $f(x)$, $g(x)$ で 0 でないもので書かれる

$$\frac{1}{f(x)g(x)}$$

という有理関数の部分分数分解を考える．以下では

$$(f(x) \text{ の次数}) \leq (g(x) \text{ の次数})$$

である場合を考える．多項式 $g(x)$ を多項式 $f(x)$ で割ったときの商が $q(x)$, 余りが $r(x)$ であったとすると

$$g(x)=q(x)f(x)+r(x)$$

であるが, この両辺を $f(x)g(x)$ で割ると

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{q(x)}{g(x)}+\frac{r(x)}{f(x)g(x)}$$

である．$r(x)\neq 0$ である場合には, この両辺を $1/r(x)$ 倍すると

$$\frac{1}{f(x)g(x)}=\frac{1}{r(x)f(x)}-\frac{q(x)}{r(x)g(x)}$$

である．こういう操作を 1 回やるだけで部分分数分解が完了するのか, それとも更に計算をせねばならないのかは, 場合による．$r(x)=0$ である場合には

$$\frac{1}{f(x)g(x)}=\frac{1}{f(x)^2q(x)}$$

なので, $f(x)$ と $q(x)$ の次数を比較して, 多項式の割り算を行うことを考えればよい．

例として, 次の有理関数の部分分数分解を考える：

$$\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+2x+3)}.$$

多項式の割り算のつもりで $x^2+2x+3=x^2+x+1+x+2$ と見ておき, この両辺を $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+2x+3\right)$ で割ると

$$\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{x^2+2x+3}+\frac{x+2}{(x^2+x+1)(x^2+2x+3)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+2x+3)}=\frac{1}{(x+2)(x^2+x+1)}-\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+3)}$$

である．この右辺にある有理関数たちに対しても同様にすると

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+x+1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x-1}{x^2+x+1},$$
$$\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+3)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{x^2+2x+3}$$

がわかる．以上によって

$$\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+2x+3)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{x-1}{x^2+x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{x^2+2x+3}$$

が得られた．

こういう風な操作によって, より一般の有理関数も部分分数分解できるということが, ある程度は理解できるであろう．

- 7.6「定積分の計算例」において, 例 7.26 としてラプラス変換の計算例を紹介した．その中で, 例えば「1 次関数 $f(t)=t$ のラプラス変換は次のようになる」と述べて

$$\text{“}L[t]=\int_0^\infty te^{-st}dt=\cdots\text{”}$$

と書き始めている．これは, 既に見た「関数 $f(x)$ が微分可能であることをまだ示していないのに $f'(x)=\cdots$ と書き始めてしまう」例のうっかりと同様の話である (1 次関数 $f(t)=t$ のラプラス変換が存在することをまだ示していない)．関数のラプラス変換というものが存在するとはどういう意味なのかを本書 178 ページの中ほどで述べているので, あまり問題はないと思うのであるが, 次のように述べれば厳密さを保持できる．$R>0$ および $s>0$ について

$$\int_0^R te^{-st}dt=\int_0^R t\cdot\left(\frac{-1}{s}e^{-st}\right)'dt=t\cdot\frac{-1}{s}e^{-st}\bigg|_0^R+\frac{1}{s}\int_0^R e^{-st}dt$$
$$=\frac{-1}{s}Re^{-sR}+\frac{1}{s}\cdot\frac{-1}{s}e^{-st}\bigg|_0^R=\frac{-1}{s}Re^{-sR}+\frac{1}{s^2}\left(1-e^{-sR}\right)$$

が成り立つ．ここで $s>0$ ならば $\lim_{R\to\infty}e^{-sR}=0$, $\lim_{R\to\infty}Re^{-sR}=0$ なので

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R te^{-st}dt=\frac{1}{s^2}$$

がわかる．よって, 関数 $f(t)=t$ のラプラス変換は $s>0$ である s に対して存在して $L[t]=1/s^2$ が成り立つ．例 7.26 の目的は「ラプラス変換のいくつかは高校数学程度の知識で計算できる」ことの紹介なので, あまり堅苦しくならずに書いた．

第 8 章「微分方程式の初歩」

- 本書 210 ページから, 8.3「ラプラス変換を使ってみる」として, 微分方程式を解くのにラプラス変換が使えることの説明が始まる．例えば命題 8.15 の (5) では

$$“L[f']=sL[f]-f(0)”$$

であることが述べられているが, 本来は, 関数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ に対する条件をもう少し詳しく述べた方がよいかもしれない．例えば次のような具合である：

> - 関数 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は $[0,\infty)$ において連続で, 区間 $(0,\infty)$ で微分可能で微分 f' も連続であるとする．更に, ある $s_0\in\mathbb{R}$ があって, $s>s_0$ なる $s\in\mathbb{R}$ については関数 f のラプラス変換 $L[f]$ が存在し, かつ $\lim_{t\to\infty}f(t)e^{-st}=0$ であるとする．このとき, f' のラプラス変換も存在して
>
> $$L[f']=sL[f]-f(0)$$
>
> が成り立つ.

厳密さを重んじる立場からは, このくらいの記述を行うべきかもしれないが, 本書ではラプラス変換の計算は全く気楽に行っている (第 7 章にある 7.6「定積分の計算例」の中にあるラプラス変換の計算も同様).

第 9 章「実数の連続性の公理と連続関数の性質」

● 本書 241 ページにて, 命題 9.13 として「コーシー列は有界列である」ことが述べられている. その証明の中で

$$\text{“}|a_n|\leq(a_1,\ldots,a_N \text{ のうち最大のもの})\leq M\text{”}$$

と述べてしまったが, これは絶対値をつけ忘れている. 正しくは

$$|a_n|\leq(|a_1|,\ldots,|a_N| \text{ のうち最大のもの})\leq M$$

である.

● 249 ページから, 命題 9.20 (「連続関数は閉区間において最大値, 最小値をとる」という内容) の証明が始まる. 詳しいことは本書を参照してもらうことにすると, 次の 250 ページにおいて

$$\text{“}\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n})=f(c)>\lim_{n\to\infty} k_n=\infty\text{”}$$

と述べている. これは背理法の “間違った仮定” の中の話なので, 害はないのであるが, 数列の極限の性質を思えば

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n})=f(c)\geq\lim_{n\to\infty} k_n=\infty$$

とする方が自然である.

● 254 ページにおいて, 命題 9.26 として「ロルの定理」について述べた. その証明の中で

“c のごく近くで考えると, $x\leq c$ ならば $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$ であり, $x\geq c$ ならば $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$ が成り立つ”

と述べた. 重大な間違いを引き起こすものではないが, 赤色で表示した部分の等号つき不等号は, ただの不等号 $x<c$ および $x>c$ にせねばならない.

● 適当な領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 $f(x,y)$ が D で連続で, かつ偏微分可能であり, 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ も D で連続であるとき, $f(x,y)$ は D で C^1-級であるという. 269 ページで, 命題 9.41 として「グリーンの定理」について軽く述べたが, もう少し正確に述べると次のようになる：

- 2 変数関数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ の適当な部分集合で定義された C^1-級な関数であるとする．$P(x,y)$, $Q(x,y)$ の定義域の中にとられた閉曲線 C を境界に持つ閉領域 D について次が成り立つ：

$$\int_C (Pdx+Qdy)=\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

第 10 章「テイラー展開の基礎」

- 本書 278 ページ中ほどに

“無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束するかどうか知りたければ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ を調べればよい”

で始まる記述があるが, 後になって読み返してみて, 何を伝えたいのかが明確でないと思われた. ここでは

「$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が有限であることがわかれば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束することがいえる」

ことを述べようとしているのだと理解してほしい.

- 279 ページ周辺にある「ダランベールの判定法」についての記述にコメントしておく. 本書では, 補題 10.7 の (i) として

“数列 $\{a_n\}_n$ が 1 より小さな 0 以上の値に収束するとする. このとき $\cdots$ ”

と述べた. この中の “0 以上の” という条件は不要であった. 例えば次のようにするので十分である:

> - 数列 $\{a_n\}_n$ は 1 より小さな値に収束すると仮定する. このとき, 1 より小さな実数 r およびある $N\in\mathbb{Z}_{>0}$ があって, $n>N$ であるすべての $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ について $a_n<r$ であるようにできる.

証明は本書にあるものとほとんど同様である. $\alpha := \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n < 1$ であるとする. $r := \dfrac{\alpha+1}{2}$ とおくと $\alpha<r<1$ である. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ なので, ある $N\in\mathbb{Z}_{>0}$ があって, $n>N$ であるすべての $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ について $|a_n-\alpha|<r-\alpha$ が成り立つようにできる. これより特に $a_n-\alpha<r-\alpha$ すなわち $a_n<r$ である. □

上に述べたことは, 次のようにして命題 10.8 (ダランベールの判定法) の証明につなげられる. 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ について極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ が存在し, この値が 1 より小さいとする. この場合, 上に述べたことから, ある $r<1$ および $N\in\mathbb{Z}_{>0}$ があって, $n>N$ であるすべての $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|<r$ である. このとき $0\leq\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ なので, 自然と $0\leq r<1$ が出る. ここから先は本書の記述とほとんと同様にすればよい.

• 286 ページの例 10.15 にて, 三角関数 $\sin x$ の点 0 の周りでのテイラー展開について述べた. 途中で

$$\text{“}\, M_n(\sin x, I_{0,x}) = 1 \,\text{”}$$

と述べているが (記号 “$M_n(f, I_{a,x})$” の定義は 285 ページの補題 10.12 を参照), これは間違いで

$$M_n(\sin x, I_{0,x}) \le 1$$

が正しい.

• 286 ページの例 10.16 で, 指数関数 e^x の点 0 の周りでのテイラー展開を解説している. 途中で

$$\text{“}\, M_n(e^x, I_{0,x}) = e^x \,\text{”}$$

と述べたが, これは間違いである. 指数関数 e^x のグラフを思い浮かべればわかるように

$$M_n(e^x, I_{0,x}) = \begin{cases} e^x & (x \ge 0), \\ 1 & (x < 0) \end{cases}$$

が正しい.

• 300 ページで, 例 10.27 として超幾何微分方程式のベキ級数解を求めている. 300 ページの中ほどに

$$\text{“} \Leftrightarrow c_{n+1} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} c_n \quad (\leftarrow c \text{ は負の整数でないので OK}) \text{”}$$

と書いたが, 正しくは「c は 0 以下の整数でないので」である.

• 301 ページから, 10.4「雑談 : 2 変数関数のテイラー展開など」が始まる. 冒頭から, 適当な領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 $f(x, y)$ があるとき, “$(a, b) \in D$ および $(x, y) \in D$ をとっておいて

$$\varphi(t) := f(a + (x-a)t, b + (y-b)t)$$

として関数 $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ を定める”, と述べている. これはもう少し注意を要する. この関数 $\varphi(t)$ を考えるというのは, 点 (a, b) と点 (x, y) を結んでできる線分

$$\left\{ (a + (x-a)t, b + (y-b)t) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t \in [0, 1] \right\}$$

における 2 変数関数 $f(x,y)$ の値を見ていることに対応するが, 一般には, この線分は D からはみ出る可能性がある. よって, 上のような関数 $\varphi(t)$ について考えたければ, 点 (a,b), $(x,y)\in D$ について「点 (a,b) を 1 つとり, 点 $(x,y)\in D$ は, これら (a,b), (x,y) を結んでできる線分が D 内に収まるように十分近くとる」, などと述べればよい.

第 11 章「指数関数の細かいところ」

- 本書 316 ページに「指数関数の像は正の実数の全体 $\mathbb{R}_{>0}$ である」ことについて補足したが, これは次のように改良できる.

(1) **指数関数は狭義単調であることを証明する.** これは本書にあるやり方で十分である (補題 11.6).

(2) **指数関数は $\mathbb{R}$ 全体で定義された連続関数であることを証明する.** これも本書の通りでよい (命題 11.8).

(3) **指数関数の像にはいくらでも大きな実数が含まれ, かつ, 大きさがいくらでも小さな正の実数が含まれることを示す.** これは, 例えば $a>1$ について $\lim_{n\to\infty} a^n=\infty$ および $\lim_{n\to\infty} a^{-n}=0$ が成り立つことから従う. 指数関数の像に 0 は含まれないことに注意する.

(4) **以上のことから,「連続関数のグラフはつながっている」ことを思い起こすと, 指数関数の像は正の実数の全体 $\mathbb{R}_{>0}$ であることがわかる.**

- 324 ページから, 11.3「対数関数から始める話について少し」が始まる. これに関して少し注意しておく. ここでは, 指数関数より先に

$$\log x := \int_1^x \frac{dt}{t} \quad (x>0)$$

として対数関数 $\log x$ を定めたらどうか, という話をしている. このとき, 対数関数 $\log x$ は微分可能で $(\log x)'=1/x$ であることがわかる. これによって

“$\log x$ が単調増加する関数であることがわかる”

と本書の 325 ページで述べているが, この部分は「狭義単調増加」と述べるべきである ($\log x$ の逆関数として $\exp(x)$ を定義するので). 325 ページの中ほどにある

“第 5 章で述べた「単調増加する関数は単射である」ことから”

も同様である. また, 325 ページの中ほどで

“こうして, $\log x$ の値域は $\mathbb{R}$ 全体であり”

と述べているが, この直前に「対数関数 $\log x$ は $\mathbb{R}_{>0}$ で定義された連続関数なので」, などの一言があった方がよい.

● 11.4「雑談：複素関数について少し」では, 主に正則関数の性質について細かいことをあまり気にせずに述べた. ただ, 後になって読み返したりしたときに, 正則関数の定義について少し気になったことがあったので, 補足しておく.

適当な領域 $D\subset\mathbb{C}$ で定義された複素関数 $f(z)$ があるとする. よくやるように, $z\in D$ をその実部 x と虚部 y によって $z=x+iy$ と表示し, 関数 $f(z)=f(x+iy)$ を z の実部 x および虚部 y の関数とみなす. この実部 $u(x,y)$, 虚部 $v(x,y)$ によって

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

と表示できる. こうして現れる $u(x,y)$ および $v(x,y)$ が x, y の関数として C^1-級であるとき, $f(z)$ も C^1-級であると述べることにする.

11.4 にある正則関数の定義を次のものに変更すれば, 厳密さをある程度保てる.

> ● 適当な領域 $D\subset\mathbb{C}$ で定義された C^1-級な複素関数 $f:D\to\mathbb{C}$ があるとする. $a\in D$ について極限
>
> $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
>
> が存在するとき, f は点 a で**正則**であるという. 定義域の各点で正則な関数を単に**正則関数**と呼ぶ.

要は, 正則関数の条件に「C^1-級であること」をつけ加えたのであるが, なぜこうするのかといえば, 複素関数の実部, 虚部の 1 階微分を積分する場面が命題 11.18 の証明の中にあるからである (例の「連続関数は積分できる」という話に収めたいのである).

こういう話は, どちらかというと細かい話なので, 正則関数についての話題を初めて目にするという読者はあまり気にしないでもよい.

● 複素数 z をその実部 x, 虚部 y によって $z=x+iy$ と表示するとき, この複素共役 $\overline{z}$ は $\overline{z}=x-iy$ なので

$$x=\frac{z+\overline{z}}{2},\quad y=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

である. 適当な $\mathbb{C}$ の部分集合上で C^1-級である複素関数 f を, 例のごとく

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

と実部, 虚部によって表示するとき, f およびその実部 u, 虚部 v を z と $\overline{z}$ の関数であるとみなすことができる. そのように見るとき, 合成関数の微分を素朴に使うと (z と $\overline{z}$

は独立な変数であるとみなす)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}&=\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}+i\frac{\partial v}{\partial \overline{z}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \overline{z}}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \overline{z}}+i\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \overline{z}}+i\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \overline{z}}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

がわかる．よって, C^1-級な複素関数 $f=u+iv$ の実部 u, 虚部 v がコーシー-リーマンの微分方程式を満たすことと, $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$ が成り立つことは同値である．これを知っていれば, 335 ページの上部にある「複素関数 f の実部, 虚部がコーシー-リーマンの微分方程式を満たすとき, $\dfrac{f(z)}{z-a}$ の実部, 虚部も同様である」ことが正しいとわかる (C^1-級な複素関数 f が $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$ を満たすというのは, この f が $\overline{z}$ に依存しないということである．複素関数 f が $\overline{z}$ に依存しないのならば, $\dfrac{f(z)}{z-a}$ も明らかに $\overline{z}$ に依存しない)．

- 正則関数の定義の変更に伴い, 336 ページの命題 11.20 を次のように変更する：

> - 適当な領域 $D\subset\mathbb{C}$ で定義された C^1-級である複素関数 $f:D\to\mathbb{C}$ を
>
> $$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$
>
> と実部, 虚部によって表示するとき, 次の (i), (ii) は同値である．
>
> (i)　$f:D\to\mathbb{C}$ は正則である．
>
> (ii)　$u(x,y)$, $v(x,y)$ はコーシー-リーマンの微分方程式を満たす．

- 336 ページで, 系 11.21 として「グルサの公式」を述べた．これについて補足しておく．適当な領域 $D\subset\mathbb{C}$ で正則な $f:D\to\mathbb{C}$ があり, この複素微分 $\dfrac{df}{dz}$ も D で正則であるとき, 実変数の場合と同様に

$$\frac{d^2 f}{dz^2}:=\frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dz}\right)$$

とおく．以下, 帰納的に, $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ について $\dfrac{d^{n-1}f}{dz^{n-1}}$ が D で正則であるとき

$$\frac{d^n f}{dz^n}:=\frac{d}{dz}\left(\frac{d^{n-1}f}{dz^{n-1}}\right)$$

とおく (意味はわかるであろう)．やはり実変数の場合と同様に $f^{(n)}:=\dfrac{d^n f}{dz^n}$ とも書く．

系 11.21 をもう少し詳しく述べると次のようになる．適当な領域 $D\subset\mathbb{C}$ で定義された正則関数 $f:D\to\mathbb{C}$ があるとする．$a\in D$ を 1 つとる．335 ページで見たように，点 a を反時計回りにとり囲む閉曲線 C を D 内にとるとき，次が成り立つのであった：

$$f^{(1)}(a)=\oint_C\frac{dz}{2\pi i}\frac{f(z)}{(z-a)^2}.$$

ここで $h\neq 0$ の大きさを十分小さくとると，上の $f^{(1)}(a)=\cdots$ と同じ C を用いて

$$f^{(1)}(a+h)=\oint_C\frac{dz}{2\pi i}\frac{f(z)}{(z-a-h)^2}$$

とできる．このとき

$$\frac{f^{(1)}(a+h)-f^{(1)}(a)}{h}=\oint_C\frac{dz}{2\pi i}\frac{f(z)(2z-2a-h)}{(z-a)^2(z-a-h)^2}\xrightarrow[h\to 0]{}2\oint_C\frac{dz}{2\pi i}\frac{f(z)}{(z-a)^3}$$

がわかる (最後の $\xrightarrow[h\to 0]{}$ の部分は，本書の 335 ページと同様にすれば示せる)．よって，$f^{(1)}$ も $a\in D$ で正則で

$$f^{(2)}(a)=2\oint_C\frac{dz}{2\pi i}\frac{f(z)}{(z-a)^3}$$

であることがわかった．これを繰り返すことで次が得られる．

- 正則関数は何度でも複素微分できる．具体的には，適当な領域 $D\subset\mathbb{C}$ で正則な関数 $f:D\to\mathbb{C}$ に対し，$a\in D$ を反時計回りにとり囲む閉曲線 $C\subset D$ をとるとき

$$f^{(n)}(a)=n!\oint_C\frac{dz}{2\pi i}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\qquad(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

- 339 ページにおいて，命題 11.22 として「正則関数はテイラー展開できる」ことの証明が述べられている．340 ページにある証明の後半で

$$“|f(z)-f_n(z)|=\left|\oint_C\frac{dw}{2\pi i}\frac{f(w)}{w-a}\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{w-a}}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n+1}\right|$$

$$\leq\oint_C\left|\frac{dw}{2\pi}\right|\frac{|f(w)|}{|w-a|}\left|\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{w-a}}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n+1}\right|$$

$$\leq\frac{2\pi R}{2\pi}\frac{M}{R}\frac{1}{1-\left|\dfrac{z-a}{w-a}\right|}\left|\frac{z-a}{w-a}\right|^{n+1}\leq\frac{M}{1-\dfrac{r}{R}}\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0”$$

と書いたが, これは明らかな間違いである. これを次のように修正する :

$$
\begin{aligned}
|f(z)-f_n(z)| &= \left| \oint_C \frac{dw}{2\pi i} \frac{f(w)}{w-a} \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{w-a}} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n+1} \right| \\
&\leq \oint_C \left|\frac{dw}{2\pi}\right| \frac{|f(w)|}{|w-a|} \left| \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{w-a}} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n+1} \right| \\
&\leq \oint_C \left|\frac{dw}{2\pi}\right| \frac{|f(w)|}{|w-a|} \frac{1}{\left|1-\left|\dfrac{z-a}{w-a}\right|\right|} \left|\frac{z-a}{w-a}\right|^{n+1} \\
&\leq \frac{2\pi R}{2\pi} \frac{M}{R} \frac{1}{1-\dfrac{r}{R}} \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} = \frac{M}{1-\dfrac{r}{R}} \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}
$$

- 341 ページの例 11.23 の中で

“この e^z の指数法則については第 10 章の例 10.24 にて知っているので”

と述べているが, 正しくは例 10.23 である. その下の例 11.24 の中の

“第 10 章の例 10.24 においてやったオイラーの公式の証明と同様にすると”

も同様である.

第 12 章「力学の初歩」

- つまらない話であるが, 本書 367 ページにおいて

$$\text{“関数 } V:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \text{ を } V(\boldsymbol{x}):=-\frac{GmM}{|\boldsymbol{x}|} \text{ とおくと”}$$

と述べている箇所がある．この関数 $V(\boldsymbol{x})$ は, 実際は $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ において定義されていない．よって, 正確には

$$\text{関数 } V:\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{0}\}\to\mathbb{R} \text{ を } V(\boldsymbol{x}):=-\frac{GmM}{|\boldsymbol{x}|} \text{ とおくと}$$

と述べねばならない.

物理に関係あるようなスカラー場やベクトル場の話をするときには, それらの定義域に関する細かいことはあまり気にせずに, 気楽に記述した.

第 13 章「より進んだ話題」

- 本書 388 ページ, 389 ページにおいて, 適当な領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 $f(x,y)$ のグラフとして現れる曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$ における滑らかなベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の面積分の定義を述べたが, 後になって見返してみると, 不要な操作が入っていることに気がついた. これは次のように簡単に述べられる.

適当な領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された滑らかな 2 変数関数 $f(x,y)$ があるとき,

$$\boldsymbol{x}(x,y):=\begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{bmatrix} \quad ((x,y)\in D)$$

とおく. これを x, y で偏微分して

$$\boldsymbol{p}_x(x,y):=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f(x,y) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_y(x,y):=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f(x,y) \end{bmatrix}$$

を定める. これらの外積によって

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{n}}(x,y):=\boldsymbol{p}_x(x,y)\times\boldsymbol{p}_y(x,y)=\begin{bmatrix} -\partial_x f(x,y) \\ -\partial_y f(x,y) \\ 1 \end{bmatrix}$$

とおく. この $\boldsymbol{p}_{\mathrm{n}}(x,y)$ が, 2 変数関数 $f(x,y)$ のグラフ

$$S:=\left\{(x,y,f(x,y))\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x,y)\in D\right\}$$

として現れる曲面上の点における法線ベクトルである. よって, S 上の点 $\boldsymbol{x}(x,y)$ における“微小面積ベクトル” $d\boldsymbol{S}$ は

$$d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{p}_x(x,y)dx\times\boldsymbol{p}_y(x,y)dy=\boldsymbol{p}_{\mathrm{n}}(x,y)dxdy$$

であると理解できる. よって, 全く素朴に, 滑らかなベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対し

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}:=\int_D \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(x,y))\cdot\boldsymbol{p}_n(x,y)dxdy$$

と定義すればよい.

本書では, 滑らかなベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を

$$“\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(x,y))=F_x(x,y)\boldsymbol{p}_x(x,y)+F_y(x,y)\boldsymbol{p}_y(x,y)+F_{\mathrm{n}}(x,y)\boldsymbol{p}_{\mathrm{n}}(x,y)”$$

と表示して話を進めていたが, これが実は全く不要だったのである.

● 先に述べた「ベクトル場の面積分の定義の簡略化」に伴い, 393 ページにある「回転定理」の証明も次のように簡素化される.

適当な $D\subset\mathbb{R}^2$ で定義された滑らかな 2 変数関数 $f(x,y)$ のグラフとして現れる曲面 S 上で, 滑らかなベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ を面積分する. 用いる記号は先に述べた通りであるとする. 注意すべきこととしては, S 上の点 $\boldsymbol{x}(x,y)$ と関数 $F(\boldsymbol{x})$ の合成 $F(\boldsymbol{x}(x,y))$ を x で微分すると

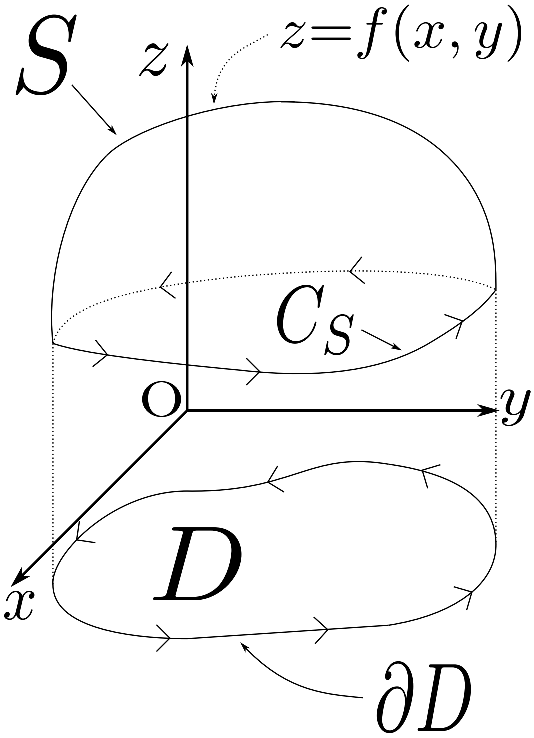
$$\partial_x\cdot F(\boldsymbol{x}(x,y))=(\partial_x F)(\boldsymbol{x}(x,y))+(\partial_z F)(\boldsymbol{x}(x,y))\cdot\partial_x f(x,y)$$

となる, などのことである. ここで, 例えば $(\partial_x F)(\boldsymbol{x}(x,y))$ は「関数 $F(\boldsymbol{x})$ を x で微分した後に $\boldsymbol{x}(x,y)$ を代入したもの」を表す. こういう記号を使うことにすると

$$\int_S(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\boldsymbol{\cdot}d\boldsymbol{S}=\int_D(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}(x,y))\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{p}_{\mathrm{n}}(x,y)dxdy$$

である. ここで $(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}(x,y))$ は「$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ の回転 $(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x})$ を計算した後に $\boldsymbol{x}(x,y)$ を代入したもの」であることに注意する. このとき

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}(x,y))\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{p}_{\mathrm{n}}(x,y)=&-\{(\partial_y A_z)(\boldsymbol{x}(x,y))-(\partial_z A_y)(\boldsymbol{x}(x,y))\}\cdot\partial_x f(x,y)\\&-\{(\partial_z A_x)(\boldsymbol{x}(x,y))-(\partial_x A_z)(\boldsymbol{x}(x,y))\}\cdot\partial_y f(x,y)\\&+(\partial_x A_y)(\boldsymbol{x}(x,y))-(\partial_y A_x)(\boldsymbol{x}(x,y))\\=&\,\partial_x\cdot A_y(\boldsymbol{x}(x,y))-\partial_y\cdot A_x(\boldsymbol{x}(x,y))\\&-(\partial_y A_z)(\boldsymbol{x}(x,y))\cdot\partial_x f(x,y)+(\partial_x A_z)(\boldsymbol{x}(x,y))\cdot\partial_y f(x,y)\end{aligned}$$



であるが, このうち後ろの 2 項について

$$\begin{aligned}
&-(\partial_y A_z)(\boldsymbol{x}(x,y))\cdot\partial_x f(x,y)+(\partial_x A_z)(\boldsymbol{x}(x,y))\cdot\partial_y f(x,y)\\
=&-\{\partial_y\cdot A_z(\boldsymbol{x}(x,y))-(\partial_z A_z)(\boldsymbol{x}(x,y))\cdot\partial_y f(x,y)\}\cdot\partial_x f(x,y)\\
&+\{\partial_x\cdot A_z(\boldsymbol{x}(x,y))-(\partial_z A_z)(\boldsymbol{x}(x,y))\cdot\partial_x f(x,y)\}\cdot\partial_y f(x,y)\\
=&-\partial_y\cdot A_z(\boldsymbol{x}(x,y))\cdot\partial_x f(x,y)+\partial_x\cdot A_z(\boldsymbol{x}(x,y))\cdot\partial_y f(x,y)\\
=&\partial_x\cdot\{A_z(\boldsymbol{x}(x,y))\cdot\partial_y f(x,y)\}-\partial_y\cdot\{A_z(\boldsymbol{x}(x,y))\cdot\partial_x f(x,y)\}
\end{aligned}$$

がわかる. 以上によって

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}(x,y))\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{p}_{\mathrm{n}}(x,y)\\
=&\partial_x\cdot\{A_y(\boldsymbol{x}(x,y))+A_z(\boldsymbol{x}(x,y))\cdot\partial_y f(x,y)\}-\partial_y\cdot\{A_x(\boldsymbol{x}(x,y))+A_z(\boldsymbol{x}(x,y))\cdot\partial_x f(x,y)\}
\end{aligned}$$

である. ここで

- $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(x,y))\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{p}_x(x,y)=A_x(\boldsymbol{x}(x,y))+A_z(\boldsymbol{x}(x,y))\cdot\partial_x f(x,y)$,
- $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(x,y))\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{p}_y(x,y)=A_y(\boldsymbol{x}(x,y))+A_z(\boldsymbol{x}(x,y))\cdot\partial_y f(x,y)$

なので, 上の結果は次のように書ける.

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}(x,y))\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{p}_{\mathrm{n}}(x,y)=\partial_x\cdot\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(x,y))\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{p}_y(x,y)\}-\partial_y\cdot\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(x,y))\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{p}_x(x,y)\}.$$

ここでグリーンの定理 (命題 9.41) を思い出すと, $D\subset\mathbb{R}^2$ の境界を ∂D と書くとき

$$\begin{aligned}
&\int_D(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}(x,y))\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{p}_{\mathrm{n}}(x,y)dxdy\\
=&\int_{\partial D}\{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(x,y))\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{p}_x(x,y)dx+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(x,y))\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{p}_y(x,y)dy\}\\
=&\int_{\partial D}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}(x,y))\boldsymbol{\cdot}\{\boldsymbol{p}_x(x,y)dx+\boldsymbol{p}_y(x,y)dy\}
\end{aligned}$$

が成り立つ. この右辺は

$$d\boldsymbol{x}(x,y)=\boldsymbol{p}_x(x,y)dx+\boldsymbol{p}_y(x,y)dy$$

を思い出すと $\displaystyle\int_{C_S}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\cdot}d\boldsymbol{x}$ である. 以上によって, 確かに次が成り立つ：

$$\int_S(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\boldsymbol{\cdot}d\boldsymbol{S}=\int_D(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}(x,y))\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{p}_{\mathrm{n}}(x,y)dxdy=\int_{C_S}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\cdot}d\boldsymbol{x}.\quad\square$$

- 396 ページから 13.2「電磁気学をつまみ食い：マクスウェル方程式」が始まる. その中で「クーロンの法則を微分方程式に直す」様子を紹介した. その際に行った計算

について少し補足したい．詳しくは本書を参照してほしいが, 401 ページ中のほどで

$$“\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\frac{-\varrho(\boldsymbol{x})}{4\pi\varepsilon_0}\int_{D_a}\boldsymbol{\nabla}'\boldsymbol{\cdot}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d^3x'=\frac{-\varrho(\boldsymbol{x})}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_a}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\boldsymbol{\cdot}d\boldsymbol{S}'=\frac{\varrho(\boldsymbol{x})}{\varepsilon_0}”$$

という風な計算をしている．ここで D_a および S_a は点 $\boldsymbol{x}$ を中心とした微小な半径 a の球領域と球面である．ここでなされたのは次のような計算である．3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の原点 $\mathbf{0}$ を中心とした半径 $R>0$ の球面を単に 球面$_R(\mathbf{0})$ と書くことにする．このとき

$$\int_{\text{球面}_R(\mathbf{0})}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}\boldsymbol{\cdot}d\boldsymbol{S}=4\pi$$

であることが次のようにしてわかる．球面 球面$_R(\mathbf{0})$ 上の点 $\boldsymbol{x}$ における微小な面積ベクトル $d\boldsymbol{S}$ の大きさを dS と書くと $d\boldsymbol{S}=\dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}dS$ なので, $|\boldsymbol{x}|=R$ に注意すると

$$\int_{\text{球面}_R(\mathbf{0})}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}\boldsymbol{\cdot}d\boldsymbol{S}=\int_{\text{球面}_R(\mathbf{0})}\frac{R^2}{R^4}dS=\frac{1}{R^2}\int_{\text{球面}_R(\mathbf{0})}dS=4\pi$$

がわかる．これによって, 例えば上の “$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\cdots$” のような計算ができる．

- 405 ページの最下部で,「物理量が時間変化する場合, アンペールの法則は一般には成り立たない」ことを見せる意味で

$$“\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})=0=\color{red}{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\varrho}{\partial t}}\cdots?”$$

と書いたが, これは真空の透磁率 μ_0 をつけ忘れている．ここで書きたかったのは

$$0=\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})=\mu_0\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{J}=-\mu_0\frac{\partial\varrho}{\partial t}\cdots?$$

である．

- 410 ページ後半から「せっかくなので, 電磁場の**ゲージ対称性**についても少し述べておこう」と宣言し, ヘルムホルツ分解や電磁ポテンシャルの話が始まる．この後に

“$\boldsymbol{v}\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ を無限遠方で十分早く $\mathbf{0}$ に収束するベクトル場とするとき”

とあるが, これは「速く」である．

- 412 ページの最下部に, ヘルムホルツ分解のための計算として

$$“\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\boldsymbol{\nabla}'\times(\boldsymbol{\nabla}'\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}'))}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{\nabla}'\times\left[\frac{\boldsymbol{\nabla}'\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right]d^3x'\color{red}{-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}(\boldsymbol{\nabla}'\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}'))\boldsymbol{\nabla}'\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)d^3x'}=\cdots”$$

と書いたが, 途中で外積の $\times$ を書くのを忘れている. 正しくは

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\boldsymbol{\nabla}'\times(\boldsymbol{\nabla}'\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}'))}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x' \\
&=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{\nabla}'\times\left[\frac{\boldsymbol{\nabla}'\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right]d^3x'-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\times(\boldsymbol{\nabla}'\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}'))d^3x' \\
&=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{\nabla}'\times\left[\frac{\boldsymbol{\nabla}'\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right]d^3x'+\boldsymbol{\nabla}\times\left[\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\boldsymbol{\nabla}'\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'\right]
\end{aligned}$$

である.

- 417 ページの命題 13.14 において,

$$\text{“}(q;q)_\infty(x;q)_\infty(qx^{-1};q)_\infty=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\quad(x\in\mathbb{C}\setminus\{0\})\text{”}$$

がヤコビの三重積公式である, と述べてしまったが, この中の和の範囲が間違っている. 正しくは

$$(q;q)_\infty(x;q)_\infty(qx^{-1};q)_\infty=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n x^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\quad(x\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$$

である.

- 例 13.20 では, 熱方程式をラプラス変換を用いて解く様子を紹介した. その中で, 431 ページに

$$\text{“}sF(x,s)-u(x,0)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(s,x)\Leftrightarrow\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(s,x)=sF(s,x)\text{”}$$

と書いてしまったが, この中に見える “$F(s,x)$” は $F(x,s)$ と書かれるべきものである.

第 14 章「付録：行列との関連」

- 本書 459 ページにて, 補題 14.17 として「2 次の複素正方行列 A が 2 つの異なる固有値 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を持つとき, これらの固有空間 V_α, V_β について $V_\alpha \cap V_\beta = \{\mathbf{0}\}$ である」ことを述べた. その証明として, 本書では背理法を用いたが, 素直にやるのでも十分であったので, その様子を紹介する.

少し記号を説明しておく. 2 次の複素正方行列 A に対し

$$\varphi_A(t) := \det(tI_2 - A) \quad \bigl(\leftarrow I_2 \text{ は 2 次の単位行列}\bigr)$$

を A の**固有多項式**と呼ぶ. t の 2 次方程式 $\varphi_A(t)=0$ の解を A の**固有値**と呼ぶ. $\lambda \in \mathbb{C}$ が 2 次の複素正方行列 A の固有値であるとき,

$$V_\lambda := \bigl\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^2 \bigm| A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \bigr\}$$

を A の固有値 λ の**固有空間**という.

“$V_\alpha \cap V_\beta = \{\mathbf{0}\}$” の証明. 2 次の複素正方行列 A が 2 つの異なる固有値 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を持つとする. $\boldsymbol{x} \in V_\alpha \cap V_\beta$ を 1 つとる. このとき $A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$ および $A\boldsymbol{x} = \beta\boldsymbol{x}$ なので, $\alpha\boldsymbol{x} = \beta\boldsymbol{x}$ すなわち $(\alpha - \beta)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ である. ここで $\alpha - \beta \neq 0$ なので $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ がわかるが, $\boldsymbol{x} \in V_\alpha \cap V_\beta$ は何でもよかったので, これより $V_\alpha \cap V_\beta = \{\mathbf{0}\}$ がわかる. $\square$